

Кузнецов Ю.В., Баев А.Б.

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К РАСЧЕТНО-
ГРАФИЧЕСКИМ РАБОТАМ ПО КУРСУ
«РАДИОТЕХНИЧЕСКИЕ ЦЕПИ И СИГНАЛЫ»**

*Прохождение аналоговых и дискретных сигналов
через линейные цепи*

Москва, 2005 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1. Анализ аналоговых сигналов	6
1.1. Аналоговые импульсные сигналы	6
1.1.1. Спектральная плотность аналоговых импульсных сигналов	6
1.1.2. Автокорреляционная функция аналоговых импульсных сиг- налов	13
1.1.3. Энергетический спектр аналоговых импульсных сигналов	14
1.2. Аналоговые периодические сигналы	15
1.2.1. Спектр аналоговых периодических сигналов	15
1.2.2. Автокорреляционная функция аналоговых периодических сигналов	15
1.2.3. Спектр мощности аналоговых периодических сигналов	17
1.3. Анализ прохождения аналоговых сигналов через линейные цепи ..	18
1.3.1. Аналоговые импульсные сигналы	18
1.3.2. Аналоговые периодические сигналы	23
2. Анализ дискретных сигналов	29
2.1. Дискретные импульсные сигналы	29
2.1.1. Спектральная плотность дискретных импульсных сигналов ...	29
2.1.2. Автокорреляционная функция дискретных импульсных сиг- налов	29
2.1.3. Энергетический спектр дискретных импульсных сигналов	30
2.2. Дискретные периодические сигналы	32
2.2.1. Спектр дискретных периодических сигналов	32
2.2.2. Автокорреляционная функция дискретных периодических сигналов	33
2.2.3. Спектр мощности дискретных периодических сигналов	34
2.3. Анализ прохождения дискретных сигналов через линейные цепи ..	35
2.3.1. Дискретные импульсные сигналы	35
2.3.2. Дискретные периодические сигналы	43
Приложение 1. Условные обозначения	50
Приложение 2. Таблица спектров сигналов	52
Приложение 3. Свойства преобразования Фурье	53
Список литературы	54

ВВЕДЕНИЕ

В любой радиотехнической или электронной системе приходится иметь дело с *сигналами*, служащими для переноса информации между отдельными устройствами системы. Такие сигналы можно назвать информационными сигналами. В этих же системах всегда присутствуют сигналы, искажающие передаваемую информацию. Это могут быть сигналы других систем, накладывающиеся на информационные сигналы, либо шумовые сигналы, обусловленные физическими процессами в элементах самой системы. Примером таких шумовых сигналов может быть тепловой шум. В целом, как полезные информационные, так искажающие помеховые сигналы, относятся к категории *случайных сигналов*, значения которых в каждый конкретный момент можно определить лишь с некоторой вероятностью.

При разработке, отладке и тестировании радиотехнических систем необходимо задавать полностью известные сигналы с тем, чтобы по результатам измерения сигналов, прошедших через устройства системы, можно было бы судить о правильности функционирования того или иного устройства или системы в целом. Это можно сделать, сравнивая измеренные сигналы с желаемыми или ожидаемыми сигналами. Кроме того, разработка любого электронного устройства включает в себя процесс *анализа* прохождения сигналов через это устройство. Анализ проводится с помощью *моделей* сигналов и устройств, описываемых некоторыми математическими функциями. Модели можно строить как в *аналитическом* виде, т.е. в виде формул и соотношений, так и в виде *компьютерных моделей*. Практика показывает, что наилучший результат анализа устройств дает разумное сочетание аналитического и компьютерного моделирования, поскольку предварительный аналитический анализ позволяет существенно упростить компьютерную модель и тем самым ускорить процесс моделирования, а значит и время на разработку радиотехнической или электронной системы.

Сигналы, используемые при моделировании, отладке и тестировании систем, относятся к классу *детерминированных* сигналов. Детерминированным называется сигнал, который можно полностью описать аналитической функцией, зависящей от времени или частоты. Детерминированные сигналы используются для описания реальных сигналов, действующих в радиотехнических или электронных системах.

Детерминированные сигналы можно разделить на две большие группы: *импульсные* и *периодические* сигналы. Под импульсными понимаются сигналы, обладающие конечной энергией. При этом импульсные сигналы могут описываться как ограниченной во времени на заданном интервале функцией, так и бесконечной функцией. Периодические сигналы могут быть получены путем суммирования бесконечного числа импульсных сигналов, отстоящих друг от друга на одинаковый интервал времени, называемый периодом повторения сигнала. Периодические сигналы обладают бесконечной энергией и характеризуются средней мощностью за период.

Детерминированные сигналы могут быть заданы в виде функции непрерывного аргумента времени (*аналоговые сигналы*). Если же сигнал задан только в дискретные моменты времени своими отсчетами, то такой сигнал называется *дискретным сигналом*. Сигнал может быть дискретным по своей природе, либо быть получен из аналогового сигнала путем его дискретизации во времени.

Таким образом, детерминированные сигналы, в общем случае, могут быть отнесены к одному из четырех типов сигналов:

- *аналоговые импульсные сигналы*, описываемые с помощью преобразования Фурье и линейной свёртки;
- *аналоговые периодические сигналы*, описываемые с помощью ряда Фурье и циклической свёртки;
- *дискретные импульсные сигналы*, описываемые с помощью дискретного по времени преобразования Фурье и дискретной линейной свёртки;
- *дискретные периодические сигналы*, описываемые с помощью дискретного преобразования Фурье и дискретной циклической свёртки.

Анализ сигналов в радиотехнических или электронных системах заключается в определении временных и частотных характеристик этих сигналов. К ним относятся временная функция сигнала, автокорреляционная функция сигнала, спектральная плотность или спектр сигнала, энергетический спектр или спектр мощности сигнала. По этим характеристикам можно определить параметры сигналов, главными из которых являются:

- длительность, период повторения, интервал дискретизации, интервал корреляции (временные параметры);
- ширина спектра, положения максимумов спектра, положение частотных гармоник (частотные параметры);
- энергия сигнала, средняя мощность сигнала (энергетические, мощностные параметры).

Зная численные значения параметров сигналов можно проводить их сравнение между собой, а также оценивать их изменение при прохождении через радиотехническую или электронную систему.

Данное учебное пособие предназначено для проведения анализа систем непрерывного и дискретного времени, описание временных и частотных характеристик сигналов и систем, изучения способов нахождения их параметров как в аналитическом виде, так и с использованием персональных компьютеров.

1. АНАЛИЗ АНАЛОГОВЫХ СИГНАЛОВ

1.1. Аналоговые импульсные сигналы

Рассмотрим процедуру анализа аналоговых импульсных сигналов во временной и частотной областях. Под импульсными понимаются сигналы, заданные на некотором участке времени (конечном или бесконечном) в виде некой математической функции. Примерами импульсных сигналов являются прямоугольный импульс, экспоненциальная функция и другие сигналы.

Основными характеристиками аналогового импульсного сигнала $s(t)$ являются:

- спектр (спектральная плотность) $S(f)$;
- автокорреляционная функция $R_s(t)$;
- энергетический спектр $W_s(f)$.

Рассмотрим процедуру отыскания каждой из этих характеристик аналоговых импульсных сигналов.

1.1.1. Спектральная плотность аналоговых импульсных сигналов

Для определения спектральной плотности (спектра) аналогового импульсного сигнала $s(t)$ используется прямое преобразование Фурье (ПФ):

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi ft} dt, \text{ (В·с)}. \quad (1.1)$$

По известному спектру $S(f)$ аналоговый импульсный сигнал может быть восстановлен с помощью обратного ПФ:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{j2\pi ft} df, \text{ (В)}. \quad (1.2)$$

Пример 1.1.1.

Рассмотрим процедуру отыскания спектра аналогового импульсного сигнала, который задается выражением:

$$s(t) = A e^{-\alpha t} \cdot u(t), \quad (1.3)$$

где $u(t)$ – единичная ступенчатая функция (функция Хевисайда):

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1/2, & t = 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

График функции $s(t)$ при выбранных значениях параметров $A = 3$ В и $\alpha = 3,14 \cdot 10^6$ Гц показан на рис. 1.1.

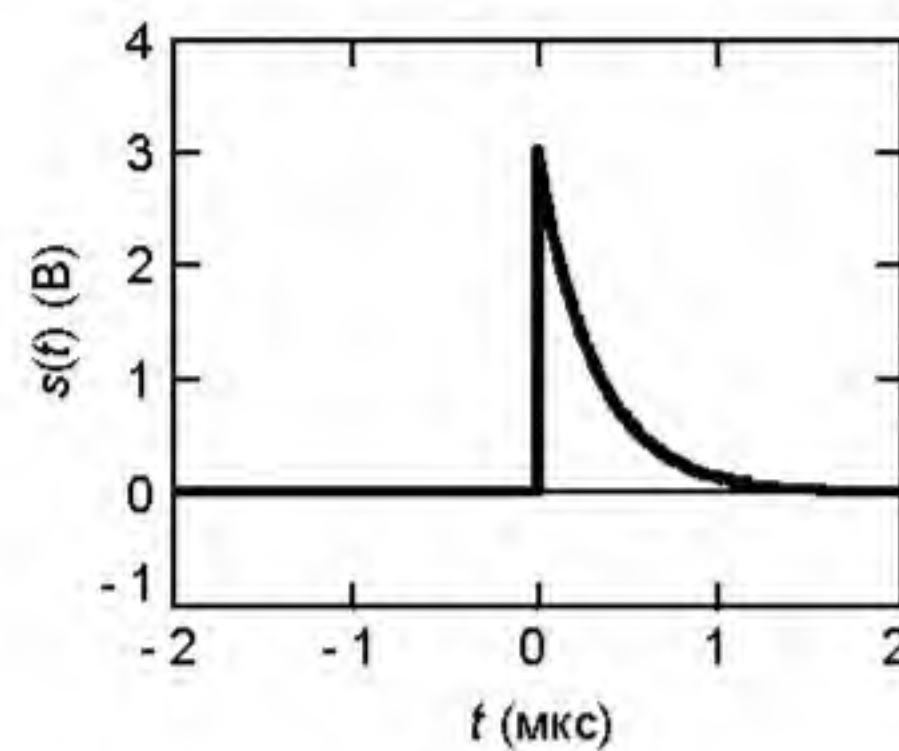


Рис. 1.1. Аналоговый импульсный сигнал $s(t)$.

Спектр сигнала $s(t)$ может быть найден с помощью выражения (1.1):

$$\begin{aligned} S(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-\alpha t} \cdot u(t) \cdot e^{-j2\pi f t} dt = \int_0^{\infty} A e^{-(\alpha + j2\pi f)t} dt = \\ &= \frac{A}{-(\alpha + j2\pi f)} e^{-(\alpha + j2\pi f)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{\alpha + j2\pi f}. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Поскольку $S(f)$ является комплексной функцией, для ее графического описания необходимо строить два графика – отдельно для действительной и мнимой составляющих или отдельно для амплитуды и фазы, что отображено на рис. 1.2 и 1.3 соответственно.

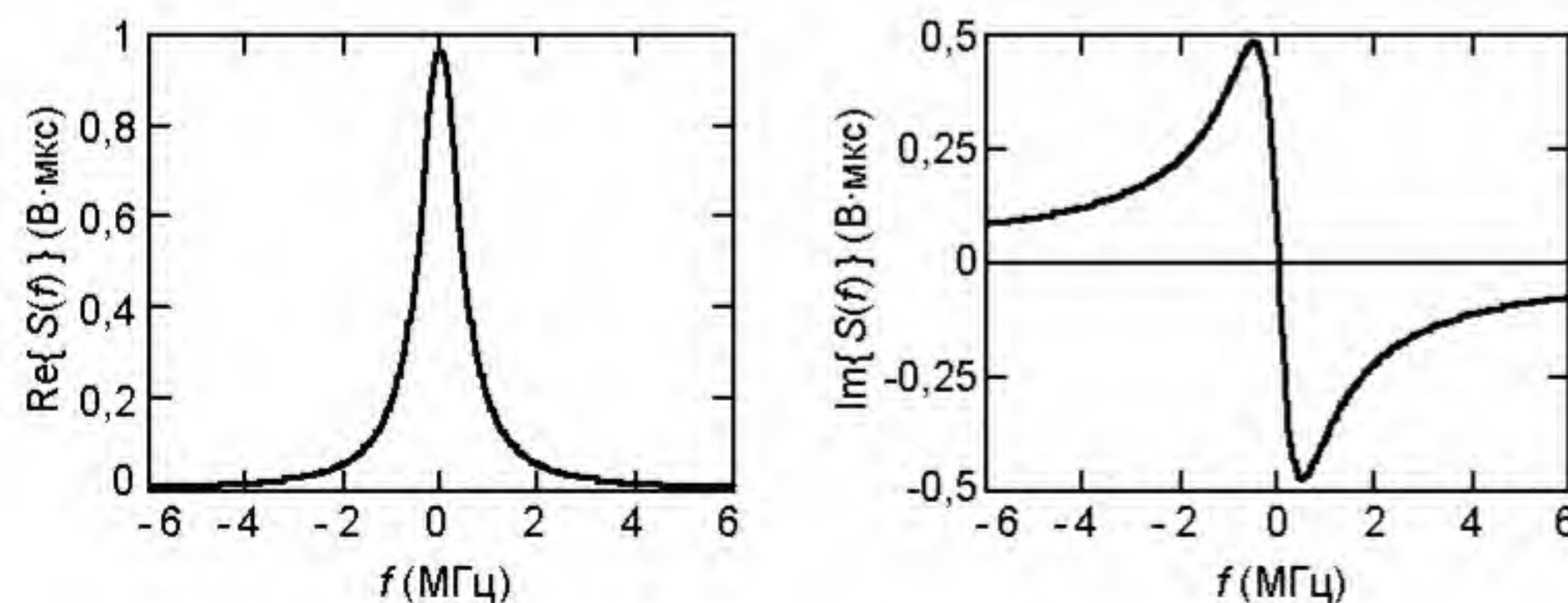


Рис. 1.2. Действительная и мнимая части спектра сигнала $s(t)$.

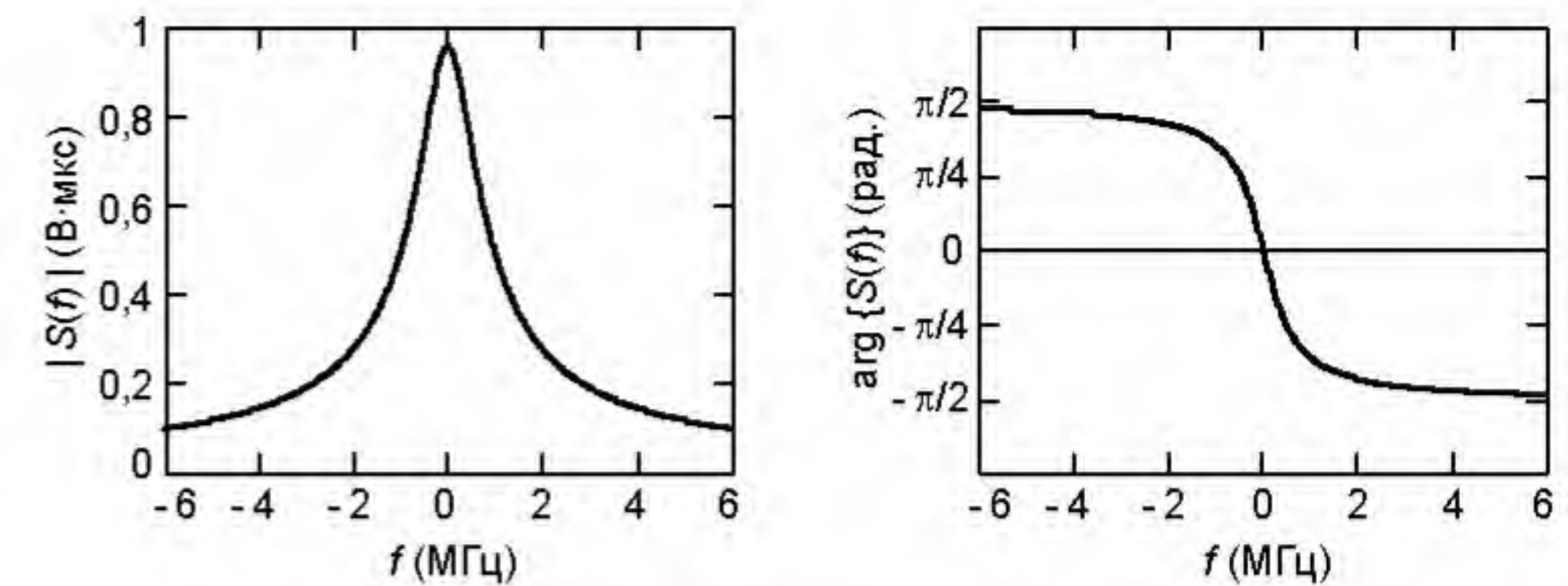


Рис. 1.3. Амплитудный и фазовый спектры сигнала $s(t)$.

Эти графики иллюстрируют свойство симметрии спектров действительных сигналов (свойство 1, прил. 3).

Проверить правильность нахождения спектра сигнала можно с помощью свойства площади преобразования Фурье (свойство 17, прил. 3):

$$S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt. \quad (1.6)$$

Площадь под экспоненциальной функцией может быть найдена как произведение $A \cdot (1/\alpha)$. Таким образом, для сигнала $s(t)$ получаем:

$$S(0) = \frac{A}{\alpha} \approx 0,96, \text{ (В·мкс)}, \quad (1.7)$$

что совпадает со значением амплитудного спектра сигнала на нулевой частоте.

На практике отыскание спектров импульсных сигналов непосредственно с помощью выражения (1.1) часто приводит к значительным вычислительным трудностям. В этом случае удобнее воспользоваться известными спектрами сигналов простой формы и свойствами преобразования Фурье, представленными в приложениях 2 и 3 соответственно.

В общем случае последовательность действий при нахождении спектров сигналов с использованием свойств преобразования Фурье:

- выбор из таблицы прил. 2 элементарных сигналов, являющихся основой для формирования заданного сигнала;
- запись заданного сигнала с помощью математических операций над выбранными элементарными сигналами;

– нахождение аналитического выражения спектра заданного сигнала с использованием спектров элементарных сигналов и свойств спектров;

– проверка правильности нахождения спектра с помощью свойств площади функций $s(t)$ и $S(f)$, свойств симметрии сигнала и спектра и результатом вычисления спектра заданного сигнала на компьютере.

Рассмотрим несколько примеров нахождения спектров сигналов с помощью свойств преобразования Фурье.

Пример 1.1.2.

Записать аналитическое выражение сигнала $s(t)$, показанного на рис. 1.4, с помощью свойств ПФ найти его спектр, построить модуль и аргумент функции $S(f)$.

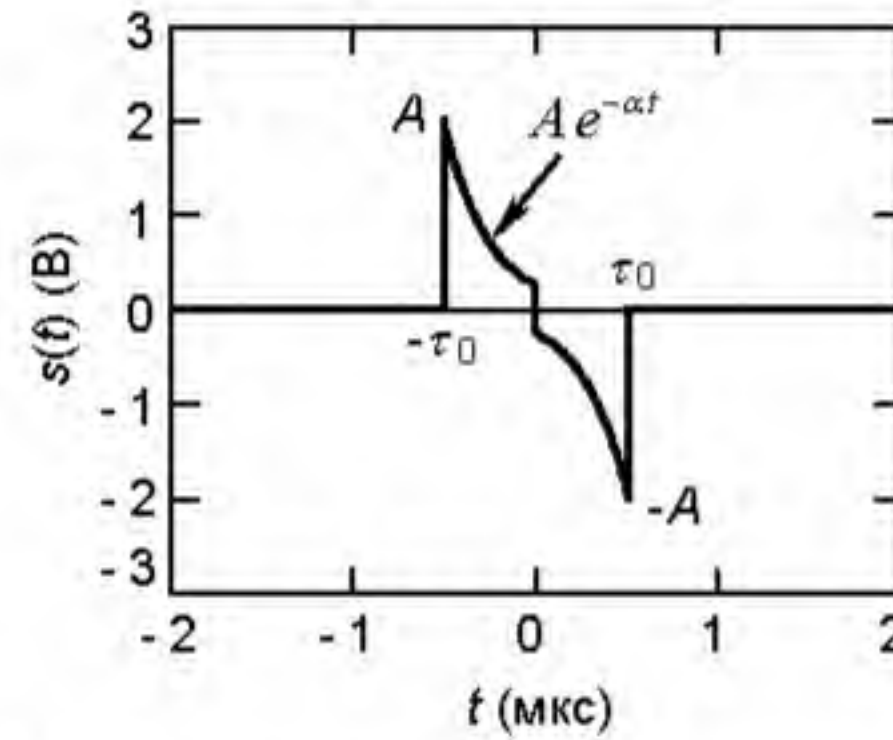


Рис. 1.4. Импульсный сигнал сложной формы.

Согласно приведенной выше методике попытаемся описать заданный сигнал с помощью элементарных сигналов. Из рисунка видно, что сигнал $s(t)$ может быть представлен в виде алгебраической суммы усеченного экспоненциального сигнала и его инвертированной во времени копии, сдвинутых во времени. Таким образом, можно записать:

$$s(t) = s_1(t + \tau_0) - s_1[-(t - \tau_0)], \quad (1.8)$$

где одиночный сигнал $s_1(t)$ определяется выражением:

$$s_1(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t}, & 0 \leq t \leq \tau_0, \\ 0, & t < 0, t > \tau_0. \end{cases} \quad (1.9)$$

Выберем следующие значения параметров сигнала: $A = 2$ В, $\alpha = 3,14$ МГц, $\tau_0 = 0,5$ мкс.

Для отыскания спектра сигнала $s(t)$ с помощью свойств преобразования Фурье сначала найдем спектр усеченной экспоненты. Сигнал $s_1(t)$ может быть получен путем суммирования двух экспоненциальных функций:

$$s_1(t) = Ae^{-\alpha t}u(t) - A \cdot e^{-\alpha \tau_0} e^{-\alpha(t-\tau_0)}u(t - \tau_0), \quad (1.10)$$

как это показано на рис. 1.5.

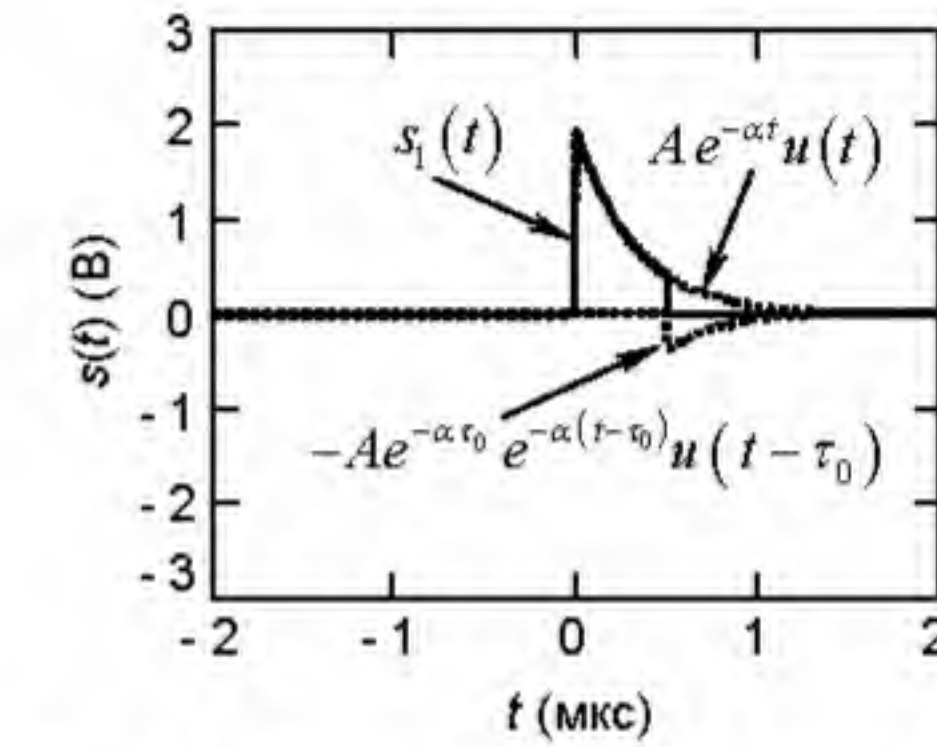


Рис. 1.5. Формирование сигнала $s_1(t)$.

Воспользовавшись свойствами линейности и задержки, получим спектр сигнала $s_1(t)$:

$$S_1(f) = \frac{A}{\alpha + j2\pi f} - \frac{Ae^{-\alpha \tau_0}}{\alpha + j2\pi f} e^{-j2\pi f \tau_0} = \frac{A}{\alpha + j2\pi f} (1 - e^{-(\alpha + j2\pi f)\tau_0}). \quad (1.11)$$

Для сигнала $s(t)$ с учетом формулы (1.8) и свойств задержки и инвертирования сигналов имеем:

$$S(f) = S_1(f) e^{j2\pi f \tau_0} - S_1^*(f) e^{-j2\pi f \tau_0}, \quad (1.12)$$

где «*» означает комплексное сопряжение. После алгебраических преобразований получаем:

$$S(f) = \frac{j2A}{\alpha^2 + 4\pi^2 f^2} \left[\alpha \sin 2\pi f \tau_0 + 2\pi f (e^{-\alpha \tau_0} - \cos 2\pi f \tau_0) \right]. \quad (1.13)$$

На рис. 1.6 представлены амплитудный и фазовый спектры сигнала соответственно.

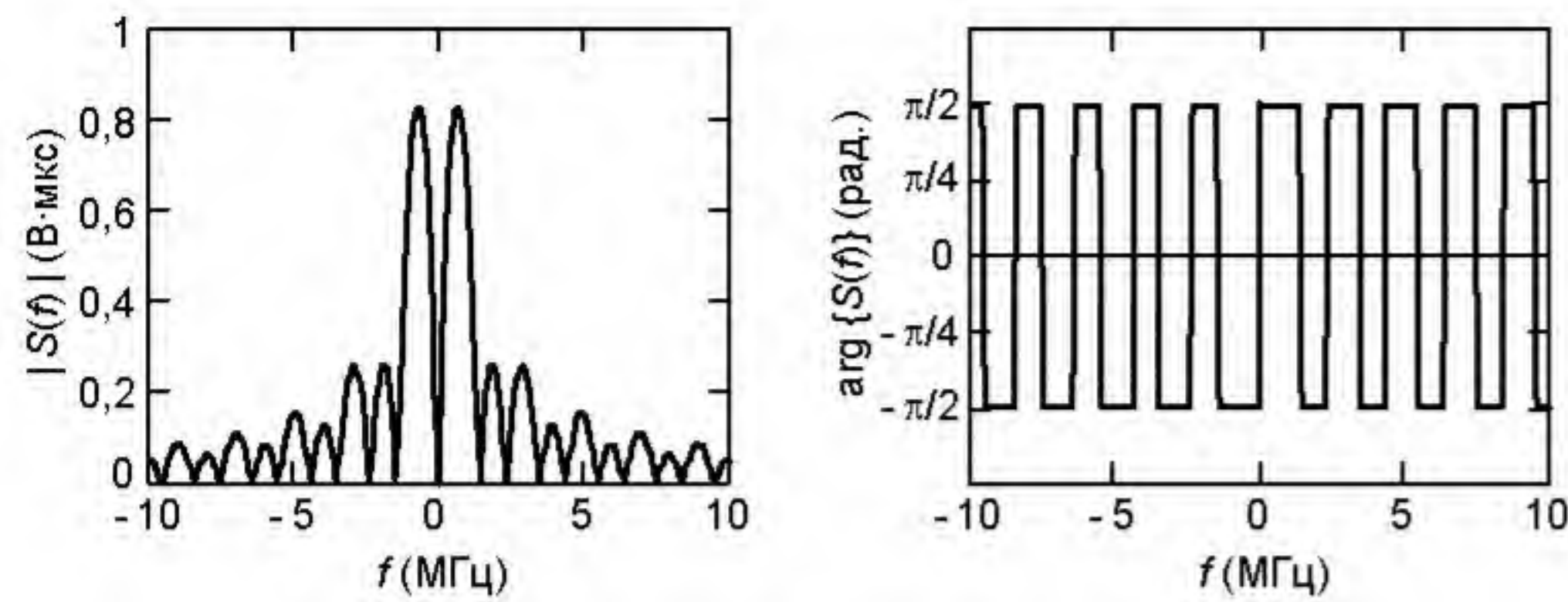


Рис. 1.6. Амплитудный и фазовый спектры сигнала $s(t)$.

Из формулы (1.13) и графиков видно, что спектр сигнала чисто мнимой нечетной функцией. Для проверки воспользуемся свойством площади сигнала и спектра:

$$S(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt = 0, \quad s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) df = 0, \quad (1.14)$$

что совпадает с графиками сигнала и спектра.

Пример 1.1.3.

С помощью свойств ПФ найти аналитическое выражение спектра сигнала

$$s(t) = \begin{cases} A - B \cdot t, & 0 \leq t \leq \tau_0 \\ 0, & t < 0, t > \tau_0 \end{cases} \quad (1.15)$$

при $A = 1$ В, $B = 0,5$ В·МГц, $\tau_0 = 2$ мкс, построить графики амплитудного и фазового спектра.

График функции сигнала $s(t)$ показан на рис. 1.7.

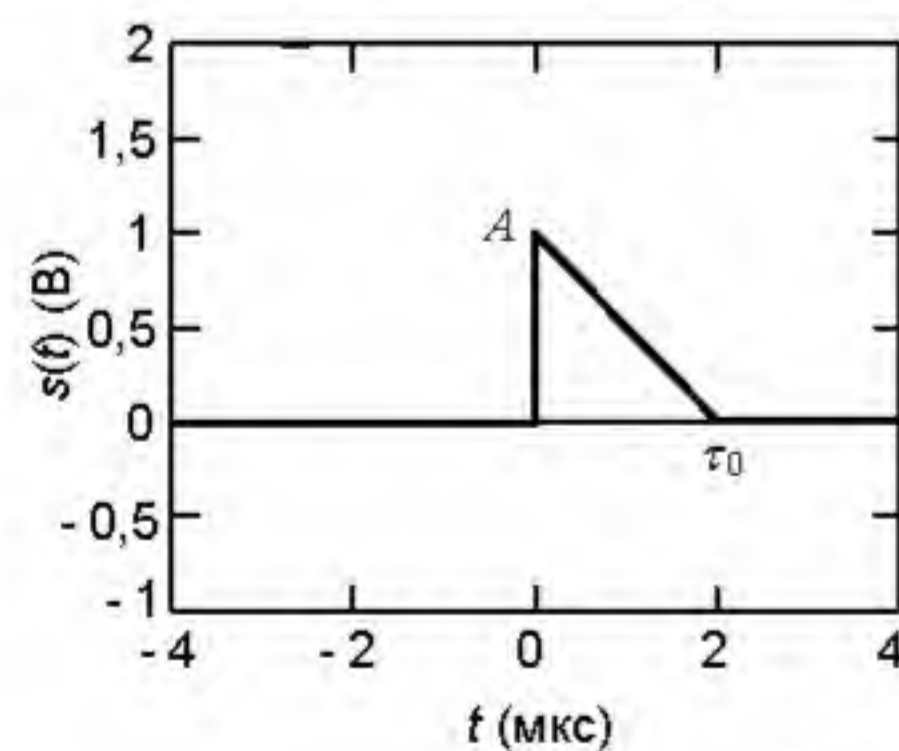


Рис. 1.7. Аналоговый импульсный сигнал $s(t)$.

Поскольку в таблице прил. 2 нет сигналов, похожих на заданный, попробуем получить элементарные сигналы с помощью математических операций над сигналом $s(t)$. Например, сигнал $s(t)$ можно продифференцировать по времени:

$$s'(t) = \frac{d s(t)}{dt} = A \cdot \delta(t) - \frac{A}{\tau_0} \text{rect}\left(t - \frac{\tau_0}{2}\right), \quad (1.16)$$

где $\delta(t)$ – дельта-функция, $\text{rect}(t)$ – прямоугольный импульс длительностью τ_0 , определяемый следующим соотношением:

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & -\tau_0/2 \leq t \leq \tau_0/2 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}. \quad (1.17)$$

График функции сигнала $s'(t)$ показан на рис. 1.8.

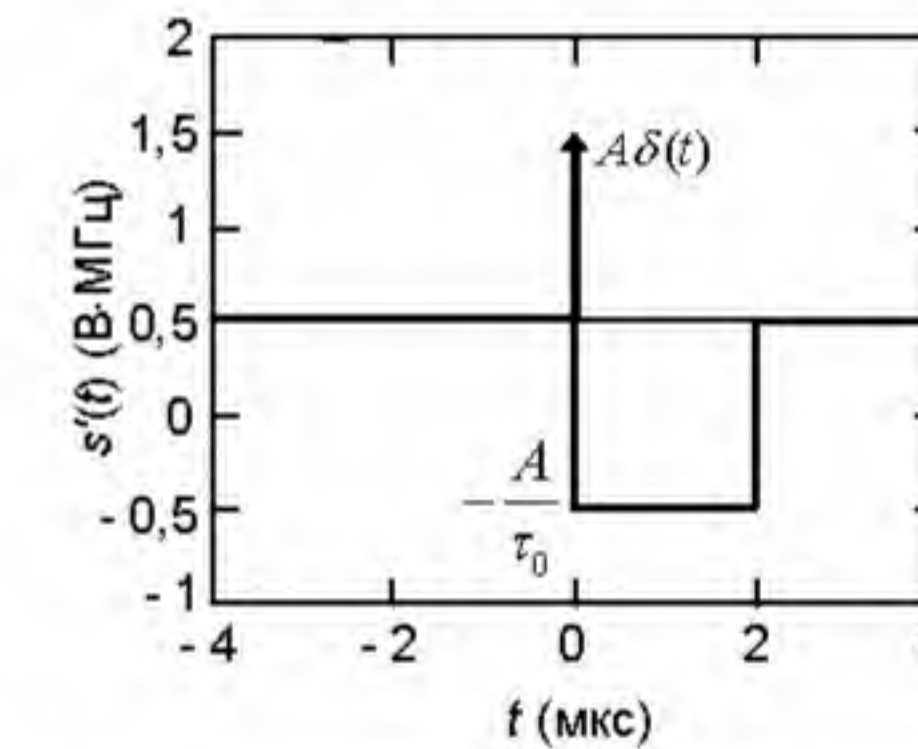


Рис. 1.8. Производная сигнала $s(t)$ во времени.

Спектры каждой из компонент сигнала $s'(t)$ известны, поэтому можно записать:

$$S'(f) = A - A \cdot \frac{\sin \pi f \tau_0}{\pi f \tau_0} e^{-j\pi f \tau_0}. \quad (1.18)$$

Для нахождения аналитического выражения сигнала $s(t)$ воспользуемся свойством интегрирования:

$$\begin{aligned} s(t) &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} S(f) \\ \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau &\stackrel{F}{\Leftrightarrow} \frac{S(f)}{j2\pi f} + \frac{s(0)}{2} \delta(f) \end{aligned} \quad (1.19)$$

Таким образом, получаем:

$$S(f) = \frac{1}{j2\pi f} \cdot S'(f) = \frac{A}{j2\pi f} \cdot \left\{ 1 - \frac{\sin \pi f \tau_0}{\pi f \tau_0} e^{-j\pi f \tau_0} \right\}. \quad (1.20)$$

1.1.2. Автокорреляционная функция аналоговых импульсных сигналов

Автокорреляционная функция (АКФ) аналогового импульсного сигнала $s(t)$ определяется как свертка самого сигнала с его инвертированной копией:

$$R_s(t) = s(t) * s(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) s(t + \tau) d\tau, \quad (\text{В}^2 \cdot \text{с}), \quad (1.21)$$

где «*» – операция линейной свертки¹.

Рассмотрим примеры нахождения автокорреляционной функции для сигналов, описанных выше.

Пример 1.2.1.

Найдем автокорреляционную функцию аналогового импульсного сигнала (1.3) с помощью выражения (1.21):

$$R_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-\alpha \tau} \cdot u(\tau) \cdot A e^{-\alpha(t+\tau)} \cdot u(t+\tau) d\tau = \frac{A^2}{2\alpha} e^{-\alpha|t|}. \quad (1.22)$$

График АКФ сигнала показан на рис. 1.9.

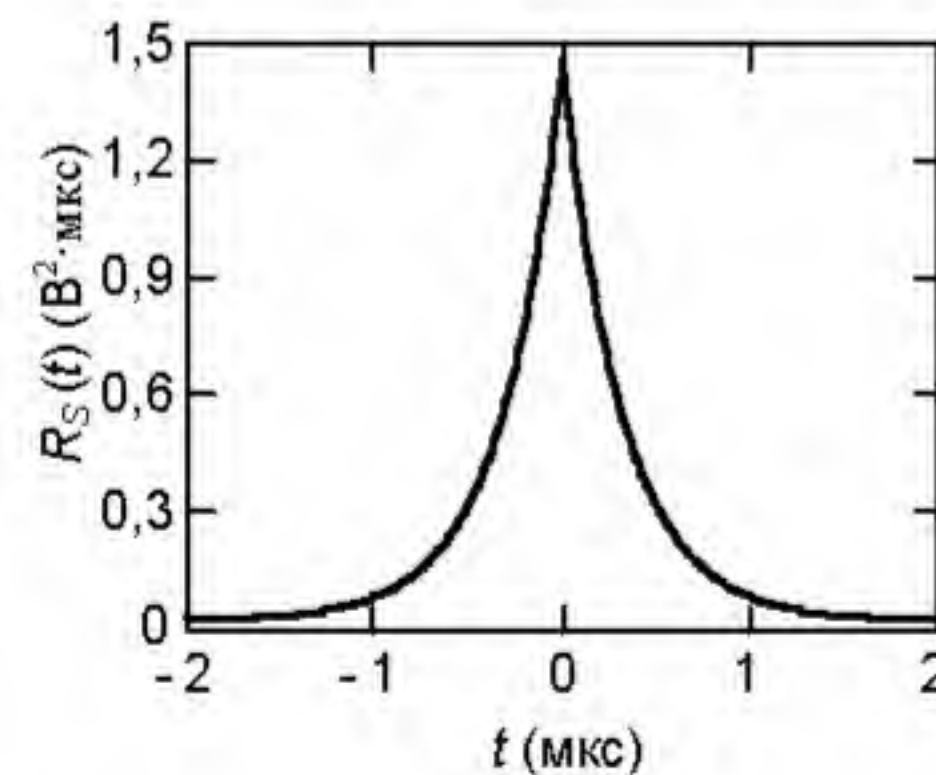


Рис. 1.9. Автокорреляционная функция сигнала $s(t)$.

¹ Линейная свертка аналоговых импульсных сигналов:

$$y(t) = s(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) x(t - \tau) d\tau$$

$$\begin{array}{c} \text{ПФ} \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \\ Y(f) = S(f) \cdot X(f) \end{array}$$

1.1.3. Энергетический спектр аналоговых импульсных сигналов

Энергетический спектр аналогового импульсного сигнала:

$$W_s(f) = S(f) \cdot S^*(f) = |S(f)|^2, \quad (\text{В} \cdot \text{с})^2, \quad (1.23)$$

где «*» – комплексное сопряжение.

Энергетический спектр и автокорреляционная функция аналогового импульсного сигнала связаны между собой преобразованием Фурье:

$$\begin{array}{ll} \text{Прямое ПФ} & \text{Обратное ПФ} \\ W_s(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_s(t) e^{-j2\pi f t} dt, \quad (\text{В} \cdot \text{с})^2, & R_s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} W_s(f) e^{j2\pi f t} df, \quad (\text{В}^2 \cdot \text{с}). \end{array}$$

Энергетический спектр аналогового импульсного сигнала может быть найден с помощью прямого ПФ от (1.22) или с использованием выражения (1.23). Энергетический спектр сигнала $s(t)$ показаны на рис. 1.10.

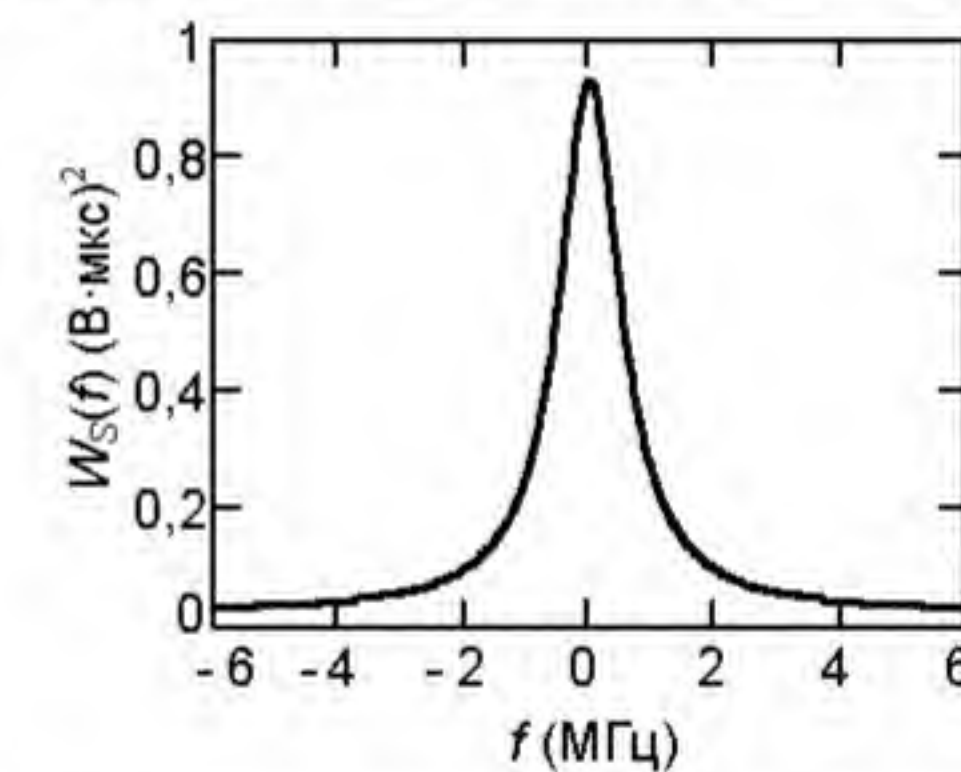


Рис. 1.10. Энергетический спектр сигнала $s(t)$.

Для проверки правильности нахождения автокорреляционной функции и энергетического спектра сигнала $s(t)$ можно воспользоваться теоремой Парсеваля для аналогового импульсного сигнала и свойством преобразования Фурье для АКФ сигнала:

$$\begin{aligned} E_s = R_s(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} W_s(f) df = \frac{A^2}{2\alpha} \approx 1,43, \quad (\text{В}^2 \cdot \text{мкс}) \\ W_s(0) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_s(t) dt = \frac{A^2}{\alpha^2} \approx 0,91, \quad (\text{В} \cdot \text{мкс})^2, \end{aligned} \quad (1.24)$$

где E_s – энергия сигнала $s(t)$.

1.2. Аналоговые периодические сигналы

1.2.1. Спектр аналоговых периодических сигналов

$$\text{Ряд Фурье (РФ)} \quad s_T(t) \Leftrightarrow S_T[m]$$

Аналоговый периодический сигнал может быть получен из импульсного аналогового сигнала $s(t)$ путём суммирования его задержанных копий через равные интервалы времени:

$$s_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s(t - kT) = s(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \quad (\text{В}), \quad (1.25)$$

где T – период повторения сигнала, « $*$ » – операция линейной свертки.

Спектр аналогового периодического сигнала определяется разложением в РФ:

$$S_T[m] = \frac{1}{T} \int_T s_T(t) e^{-j \frac{2\pi m t}{T}} dt, \quad (\text{В}). \quad (1.26)$$

Аналоговый периодический сигнал связан с его спектром следующим соотношением:

$$s_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_T[m] e^{j \frac{2\pi m t}{T}}, \quad (\text{В}). \quad (1.27)$$

Спектр аналогового периодического сигнала также может быть получен по известному спектру аналогового импульсного сигнала:

$$S_T[m] = \frac{1}{T} S\left(\frac{m}{T}\right), \quad (\text{В}), \quad (1.28)$$

$$S_T(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_T[m] \cdot \delta\left(f - \frac{m}{T}\right), \quad (\text{В} \cdot \text{с}). \quad (1.29)$$

Пример 1.2.1.

Аналоговый периодический сигнал $s_T(t)$, получаемый из импульсного сигнала $s(t)$ с помощью выражения (1.25), показан на рис. 1.11. Период повторения импульсов выбран равным $T = 2$ мкс.

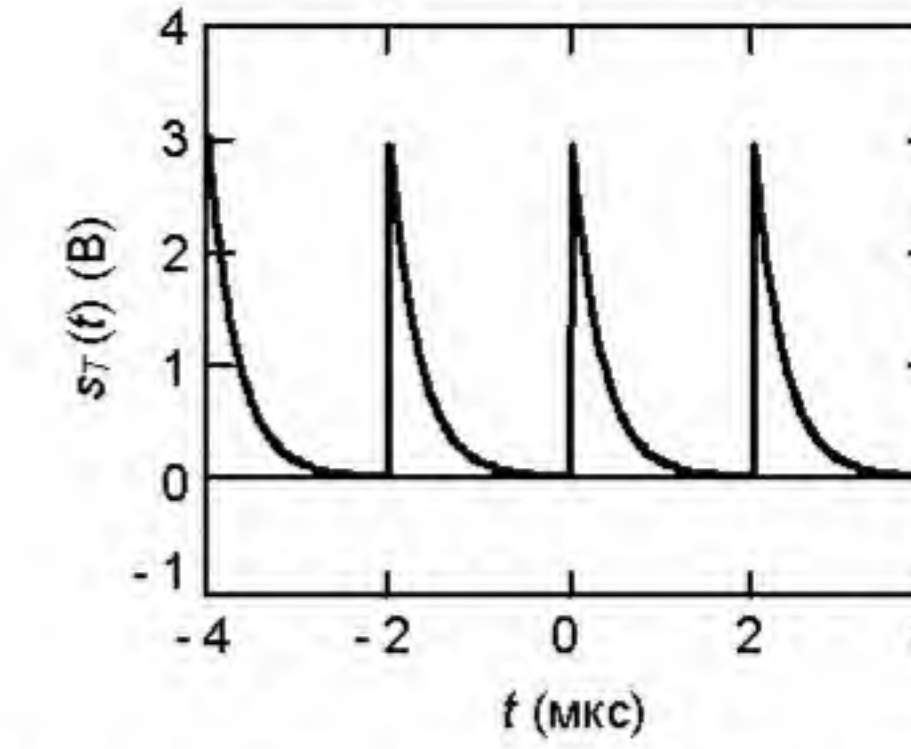


Рис. 1.11. Аналоговый периодический сигнал $s_T(t)$

Спектр сигнала $s_T(t)$ может быть найден с помощью выражений (1.26) или (1.28):

$$S_T[m] = \frac{1}{T} S\left(\frac{m}{T}\right) = \frac{1}{T} \frac{A}{j2\pi m + \alpha} = \frac{A}{j2\pi m + \alpha T}. \quad (1.30)$$

Амплитудный и фазовый спектры сигнала $s_T(t)$ показаны на рис. 1.12. Для аналогового периодического сигнала также справедливо свойство преобразования Фурье:

$$S[0] = \frac{1}{T} \int_0^T s_T(t) dt = \frac{A}{\alpha T} \approx 0,48, \quad (\text{В}). \quad (1.31)$$

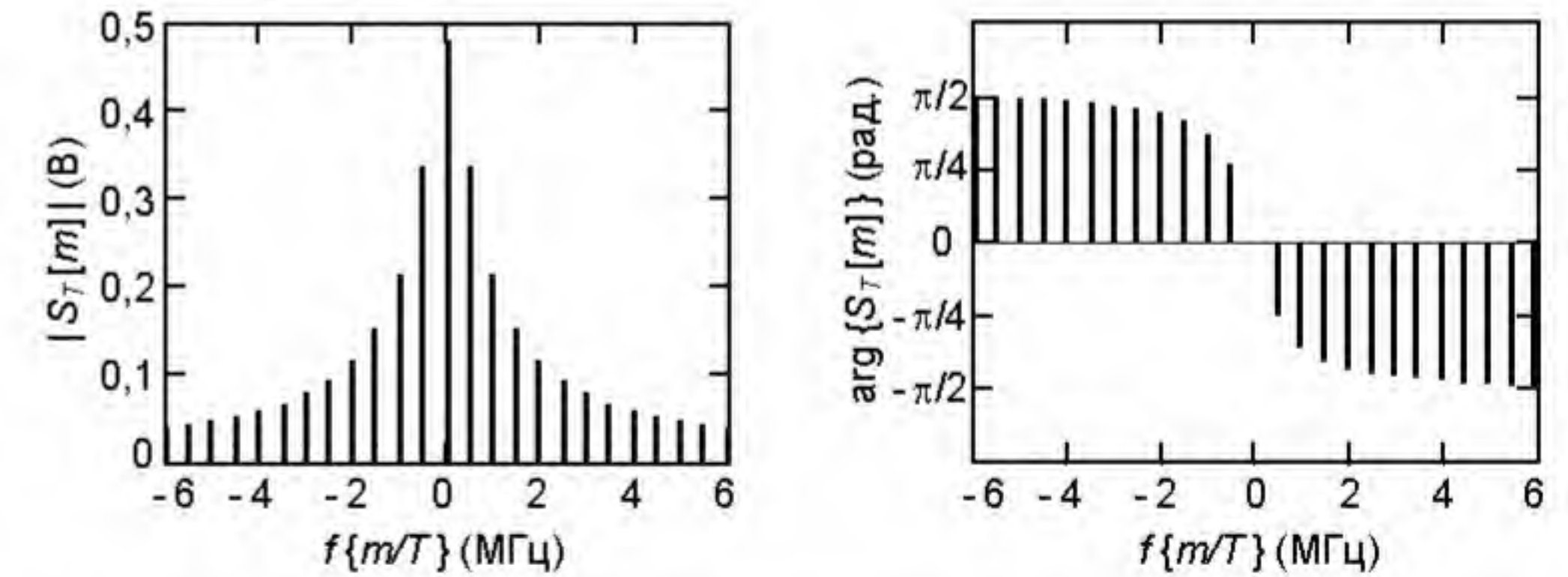


Рис. 1.12. Амплитудный и фазовый спектры аналогового периодического сигнала $s_T(t)$.

1.2.2. Автокорреляционная функция аналоговых периодических сигналов

Автокорреляционная функция аналогового периодического сигнала определяется следующим соотношением:

$$R_{s_T}(t) = s_T(t) \otimes s_T(-t) = \frac{1}{T} \int_0^T s_T(\tau) s_T(t + \tau) d\tau, (B^2), \quad (1.32)$$

где « \otimes » – операция круговой свертки¹.

1.2.3. Спектр мощности аналоговых периодических сигналов

Спектр мощности и спектральная плотность мощности аналогового периодического сигнала определяются соотношениями:

$$P_{s_T}[m] = S_T[m] \cdot S_T^*[m] = |S_T[m]|^2, (B^2). \quad (1.33)$$

$$P_{s_T}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_{s_T}[m] \cdot \delta\left(f - \frac{m}{T}\right), (B^2 \cdot c). \quad (1.34)$$

Спектр мощности и автокорреляционная функция аналогового периодического сигнала связаны между собой рядом Фурье:

Прямой РФ $P_{s_T}[m] = \frac{1}{T} \int_0^T R_{s_T}(t) e^{-j \frac{2\pi m t}{T}} dt, (B^2),$	Обратный РФ $R_{s_T}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_{s_T}[m] e^{j \frac{2\pi m t}{T}}, (B^2).$
--	---

Пример 1.2.2.

Автокорреляционная функция аналогового периодического сигнала $s_T(t)$ может быть найдена с помощью операции круговой свертки (1.32), а спектр мощности – с помощью выражения (1.33). АКФ и спектр мощности сигнала $s_T(t)$ показаны на рис. 1.13 и 1.14 соответственно.

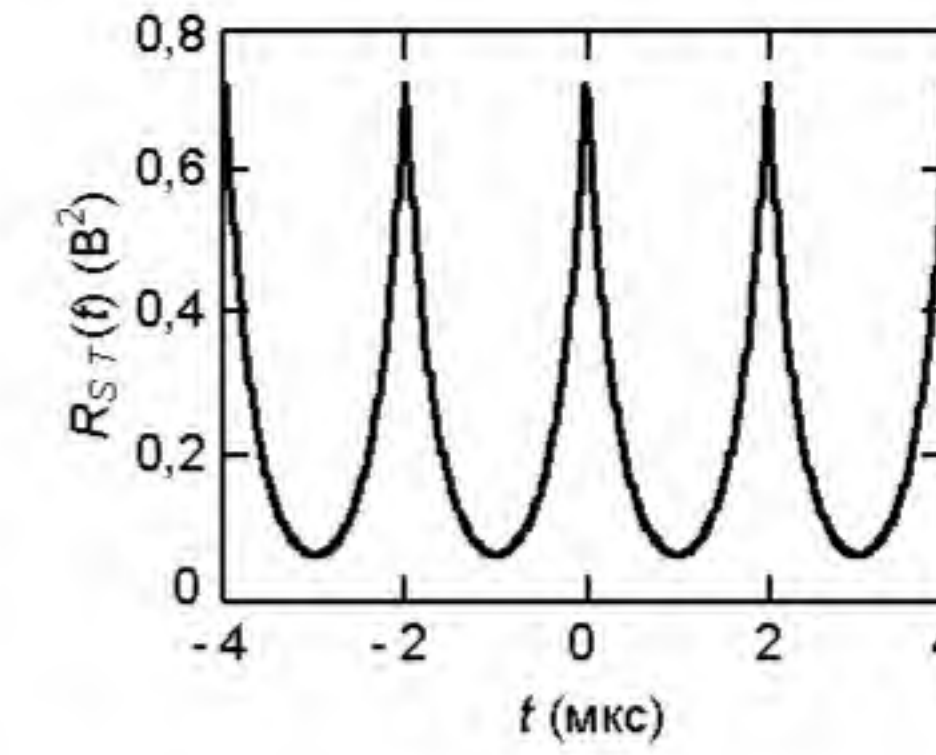


Рис. 1.13. Автокорреляционная функция сигнала $s_T(t)$.

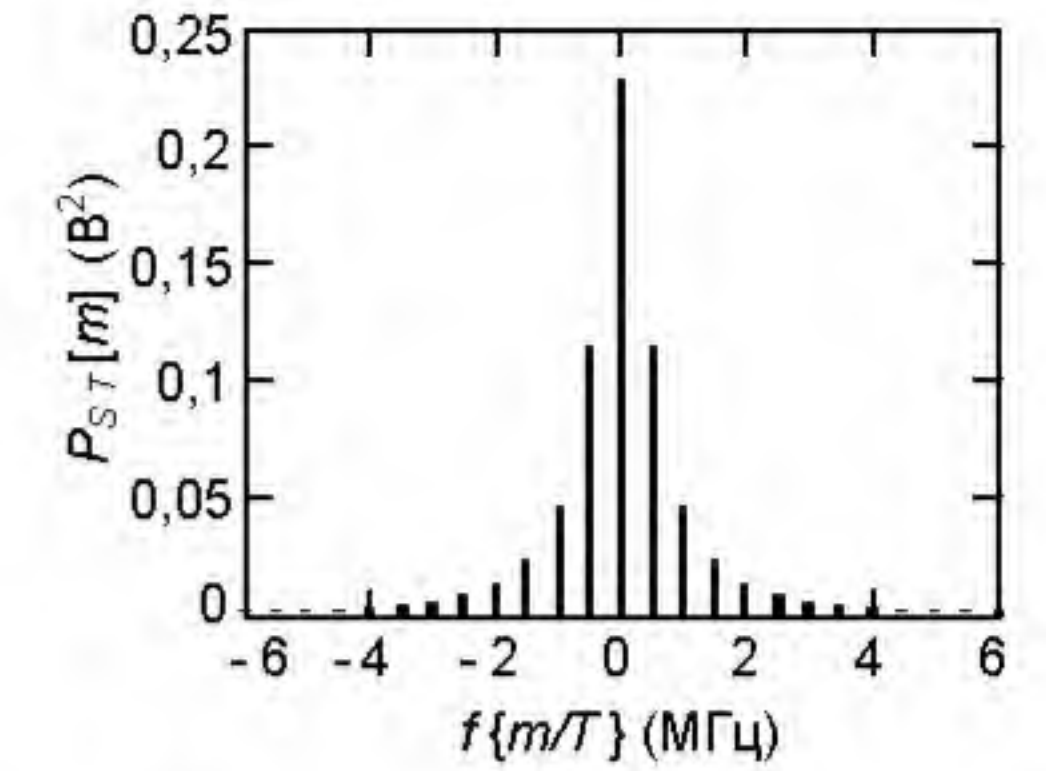


Рис. 1.14. Спектр мощности сигнала $s_T(t)$.

Для проверки правильности нахождения автокорреляционной функции и спектра мощности сигнала $s_T(t)$ воспользуемся теоремой Парсеваля для периодических сигналов и свойством разложения в ряд Фурье для АКФ сигнала:

$$\begin{aligned} P_{cp} = R_{s_T}(0) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_{s_T}[m] \approx 0,72, (B^2), \\ P_{s_T}[0] &= \frac{1}{T} \int_0^T R_{s_T}(t) dt \approx 0,23, (B^2), \end{aligned} \quad (1.35)$$

где P_{cp} – средняя за период мощность сигнала $s_T(t)$.

1.3. Анализ прохождения аналоговых сигналов через линейные цепи

1.3.1. Аналоговые импульсные сигналы

Рассмотрим процедуру прохождения аналогового импульсного сигнала $s(t)$ через линейную цепь (рис. 1.15).

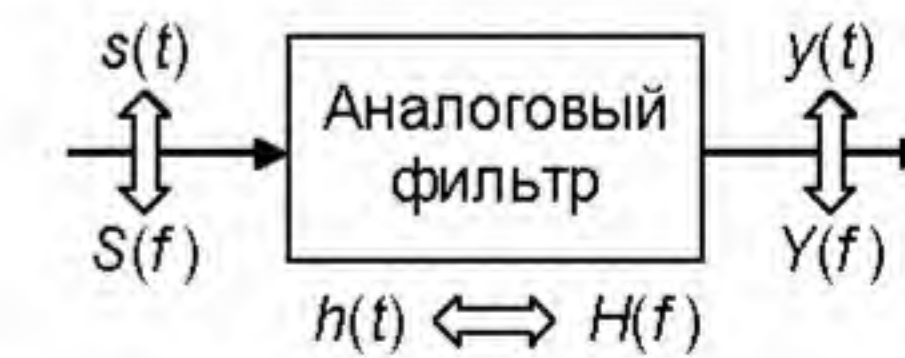


Рис. 1.15. Прохождение аналогового импульсного сигнала через линейную цепь.

Линейная цепь описывается импульсной характеристикой $h(t)$ во временной области и комплексной частотной характеристикой $H(f)$ в частотной области. Импульсная и частотная характеристики линейной цепи связаны друг с другом преобразованием Фурье:

¹Циклическая (круговая) свёртка аналоговых периодических сигналов:

$$y_T(t) = s_T(t) \otimes x_T(t) = \frac{1}{T} \int_T s_T(\tau) x_T(t - \tau) d\tau$$

$$\begin{matrix} P\Phi & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow \\ Y_T[m] & = & S_T[m] \cdot X_T[m]. \end{matrix}$$

Прямое ПФ

$$H(f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j2\pi ft} dt, \text{ (б/р)},$$

Обратное ПФ

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) e^{j2\pi ft} df, \text{ (Гц)}.$$

Для импульсной характеристики $h(t)$ аналогового фильтра может быть определена автокорреляционная функция:

$$R_h(t) = h(t) * h(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) h(t + \tau) d\tau, \text{ (Гц)}, \quad (2.36)$$

где «*» – операция линейной свертки.

Энергетическая частотная характеристика аналогового фильтра определяется соотношением:

$$G(f) = H(f) \cdot H^*(f) = |H(f)|^2, \text{ (б/р)}, \quad (1.37)$$

где «*» – комплексное сопряжение.

В качестве примера линейной цепи рассмотрим фильтр высоких частот (ФВЧ) первого порядка с граничной частотой полосы пропускания $f_{зр} = 1,5$ МГц. Импульсная характеристика фильтра определяется следующим соотношением:

$$h(t) = \delta(t) - \beta \cdot \exp(-\beta t) \cdot u(t), \text{ (Гц)}, \quad (1.38)$$

где $\beta = 2\pi f_{зр}$, $\delta(t)$ – дельта-функция, $u(t)$ – единичная ступенчатая функция, определяемая выражением (1.40). По известной импульсной характеристике $h(t)$, показанной на рис. 1.16, можно с помощью преобразования Фурье найти частотную характеристику фильтра:

$$H(f) = \frac{j2\pi f}{j2\pi f + \beta}, \text{ (б/р)}. \quad (1.39)$$

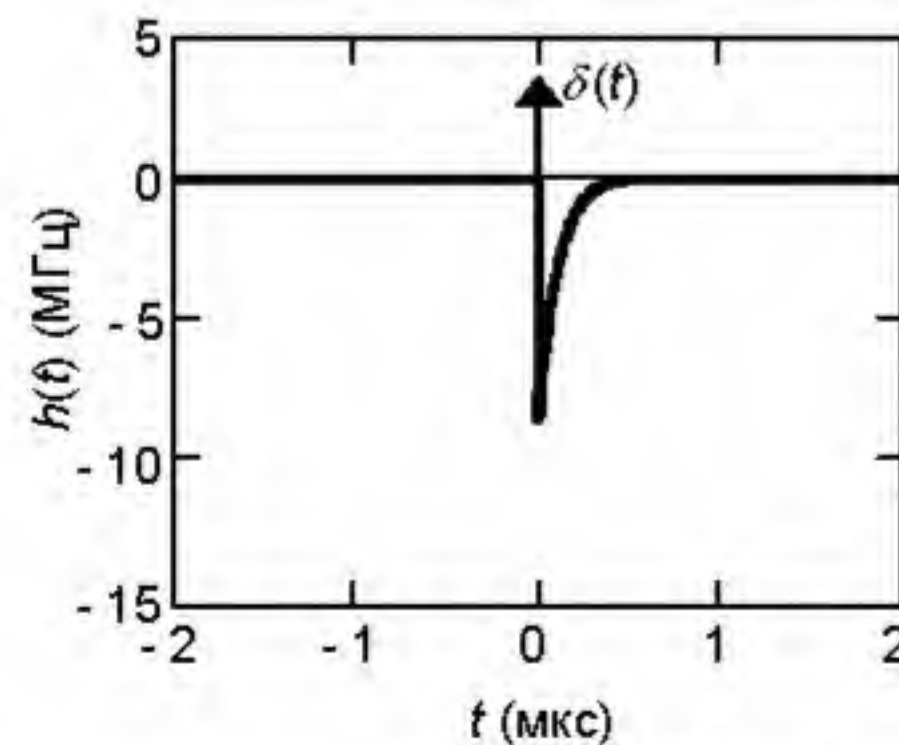


Рис. 1.16. Импульсная характеристика фильтра высоких частот с граничной частотой $f_{зр} = 1,5$ МГц.

Амплитудная и фазовая частотные характеристики аналогового ФВЧ первого порядка показаны на рис. 1.17.

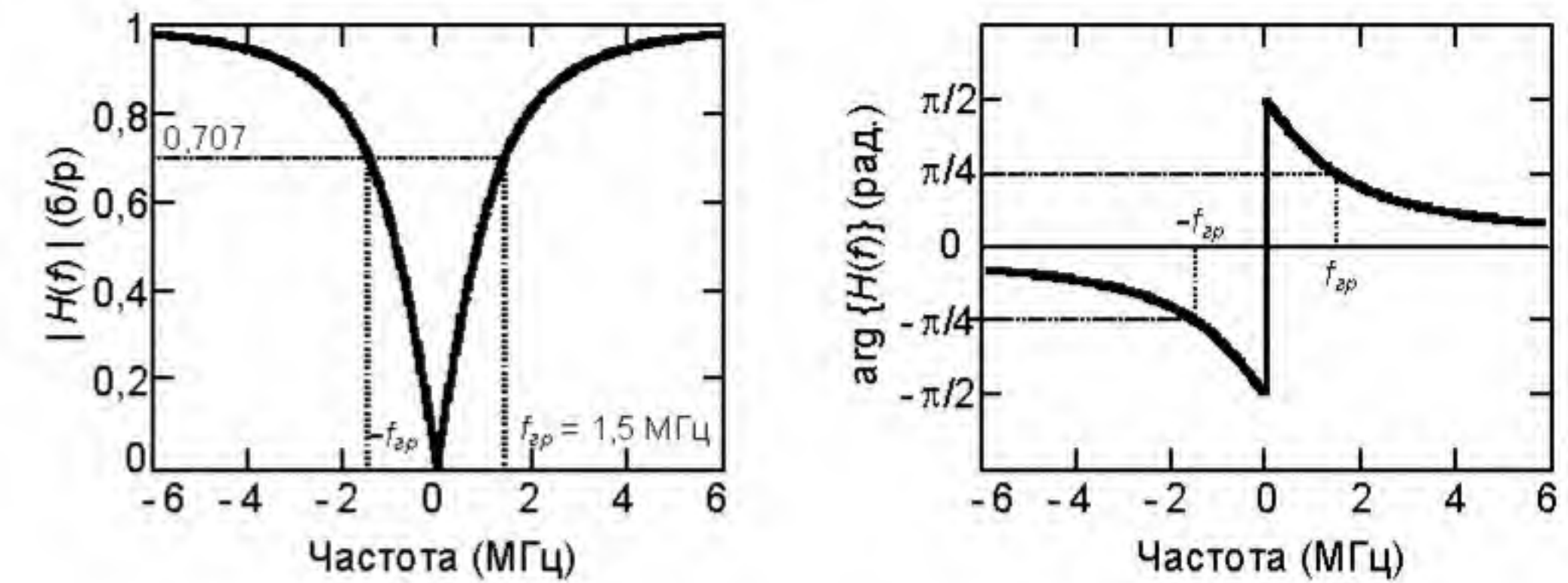


Рис. 1.17. Амплитудная и фазовая характеристики аналогового ФВЧ.

По известной импульсной характеристике $h(t)$ аналогового фильтра с помощью формулы (2.36) может быть определена автокорреляционная функция ИХ $R_h(t)$, показанная на рис. 1.18, а по формуле (1.37) можно оценить энергетическую частотную характеристику фильтра $G(f)$, представленную на рис. 1.19.

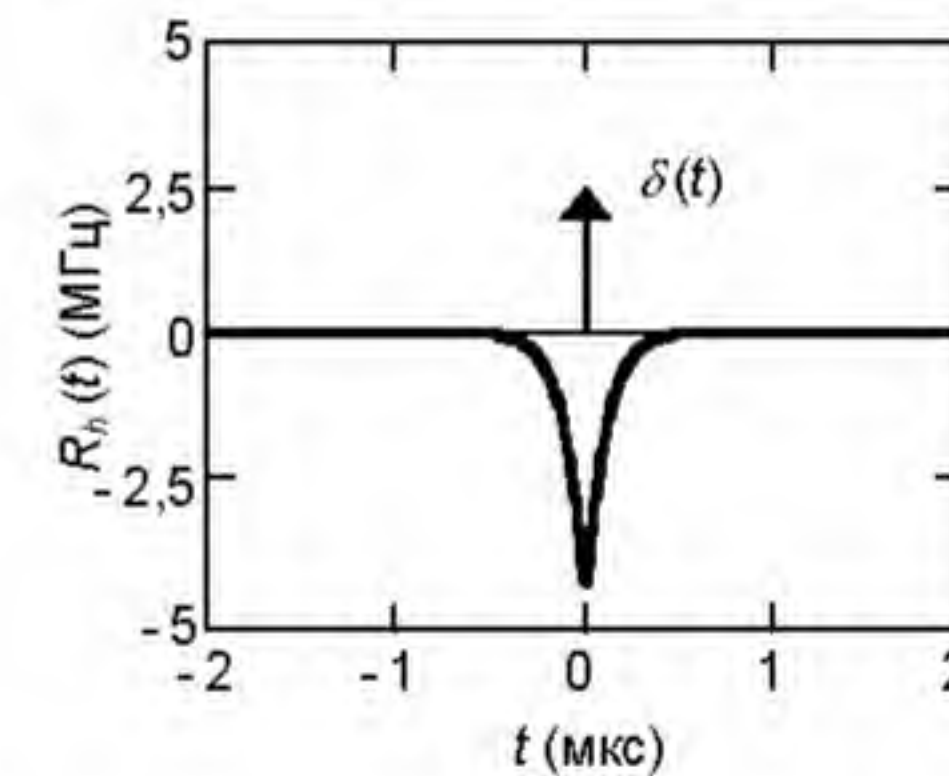


Рис. 1.18. Автокорреляционная функция импульсной характеристики ФВЧ.

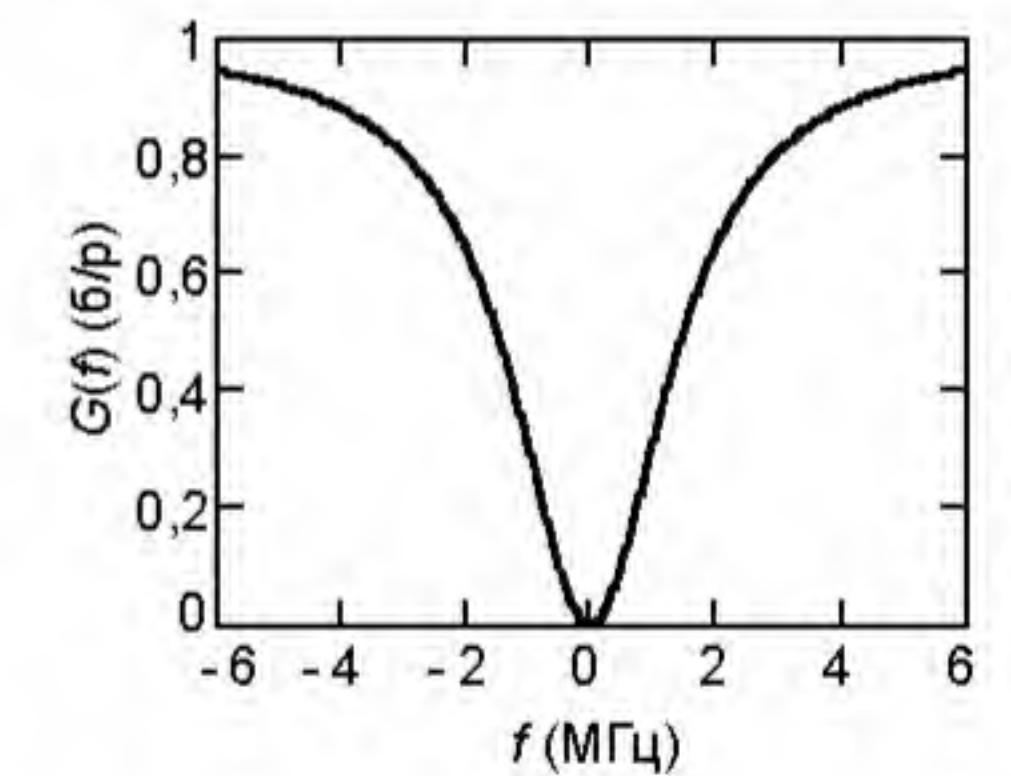


Рис. 1.19. Энергетическая частотная характеристика ФВЧ.

Далее рассмотрим процедуру нахождения сигнала на выходе линейной цепи. Аналоговый импульсный сигнал на выходе фильтра может быть найден либо по известному сигналу на входе фильтра и импульсной характеристике фильтра (во временной области), либо по известному спектру сигнала на входе фильтра и частотной характеристике фильтра (в частотной области):

$$y(t) = s(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau, (B),$$

$$\begin{array}{ccc} \text{ПФ} & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow \\ Y(f) & = & S(f) \cdot H(f), & (B \cdot c). \end{array} \quad (1.40)$$

Автокорреляционная функция аналогового импульсного сигнала на выходе фильтра может быть найдена несколькими способами:

– по известному сигналу на выходе фильтра:

$$R_y(t) = y(t) * y(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau) y(t + \tau) d\tau, (B^2 \cdot c); \quad (1.41)$$

– по известным АКФ сигнала на входе фильтра и АКФ импульсной характеристики аналогового фильтра:

$$R_y(t) = R_s(t) * R_h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} R_s(\tau) R_h(t - \tau) d\tau, (B^2 \cdot c). \quad (1.42)$$

Энергетический спектр сигнала на выходе фильтра также может быть найден несколькими способами:

– по известному спектру сигнала на выходе фильтра:

$$W_y(f) = Y(f) \cdot Y^*(f) = |Y(f)|^2, (B \cdot c)^2; \quad (1.43)$$

– по известным энергетическому спектру сигнала на входе фильтра и энергетической частотной характеристике аналогового фильтра:

$$W_y(f) = W_s(f) \cdot G(f), (B \cdot c)^2. \quad (1.44)$$

Энергетический спектр и автокорреляционная функция аналогового импульсного сигнала на выходе фильтра связаны между собой преобразованием Фурье:

$$\begin{array}{ll} \text{Прямое ПФ} & \text{Обратное ПФ} \\ W_y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(t) e^{-j2\pi ft} dt, (B \cdot c)^2, & R_y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} W_y(f) e^{j2\pi ft} df, (B^2 \cdot c). \end{array}$$

Рассмотрим пример прохождения аналогового импульсного сигнала $s(t)$ (1.3) через фильтр высоких частот первого порядка, описанный выше.

Сигнал на выходе фильтра $y(t)$, найденный по формуле (1.40), показан на рис. 1.20, а амплитудный и фазовый спектры этого сигнала – на рис. 1.21.

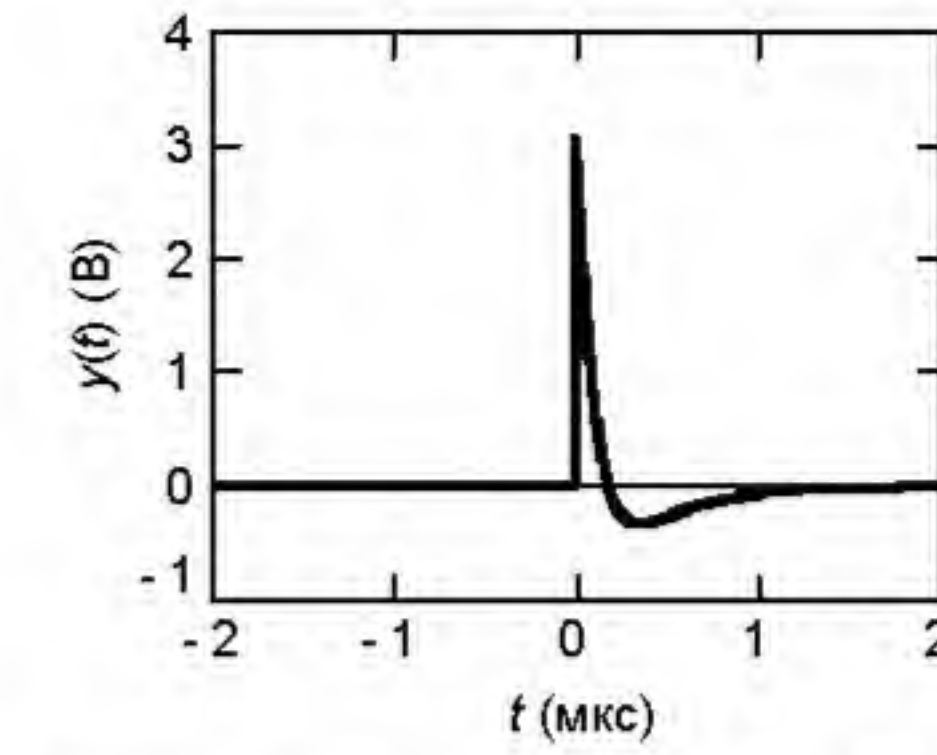


Рис. 1.20. Аналоговый импульсный сигнал на выходе ФВЧ.

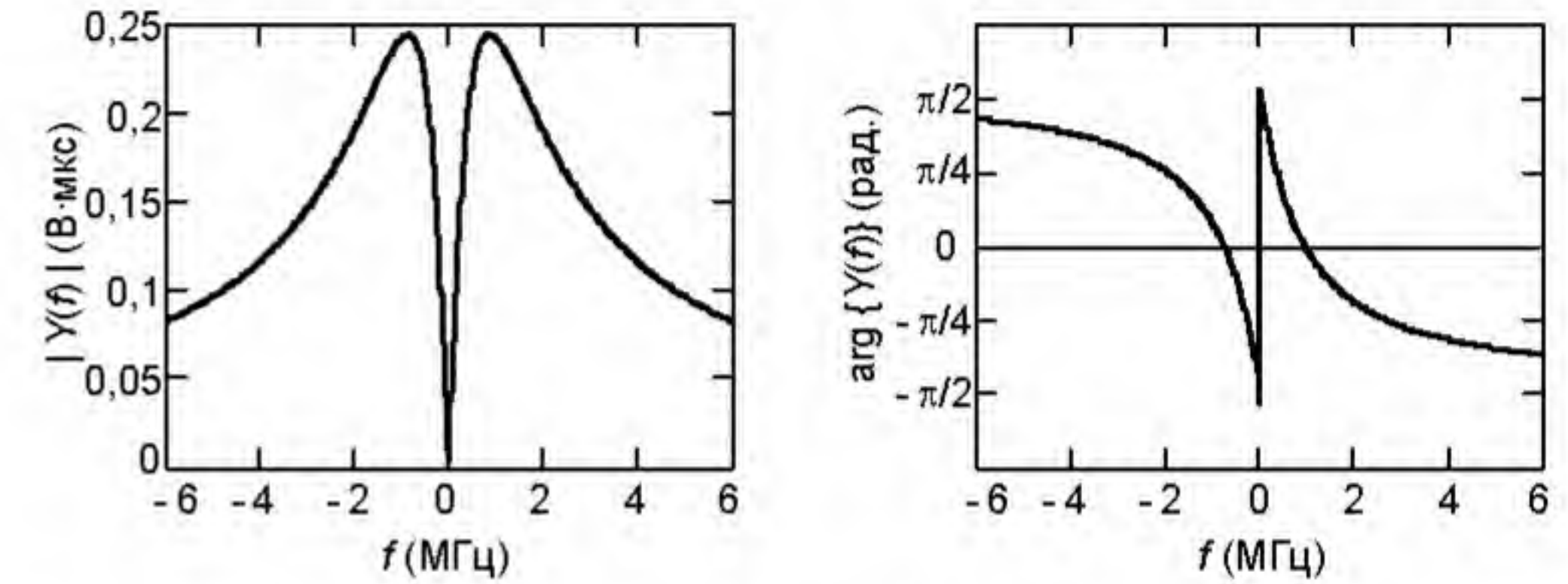


Рис. 1.21. Амплитудный и фазовый спектры сигнала $y(t)$ на выходе ФВЧ.

Для нахождения автокорреляционной функции аналогового импульсного сигнала на выходе фильтра $R_y(t)$ можно воспользоваться формулами (1.41) или (1.42). Энергетический спектр $W_y(f)$ сигнала на выходе ФВЧ может быть оценен с помощью формул (1.43) или (1.44). Полученные АКФ и энергетический спектр сигнала на выходе фильтра представлены на рис. 1.22 и 1.23 соответственно.

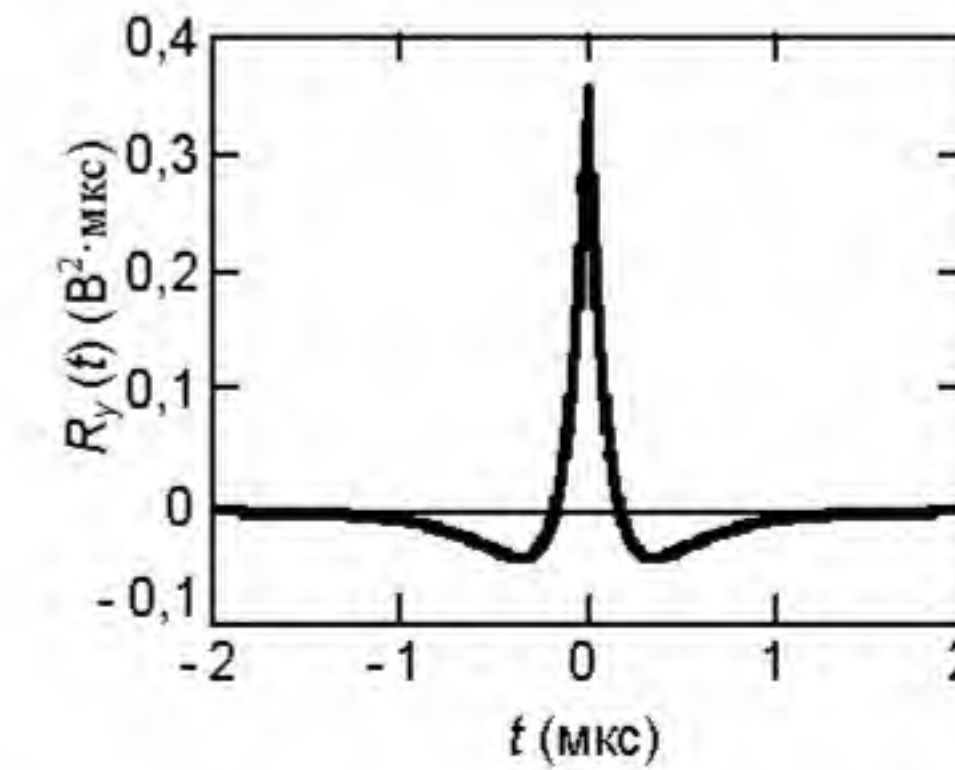


Рис. 1.22. Автокорреляционная функция сигнала $y(t)$ на выходе ФВЧ.

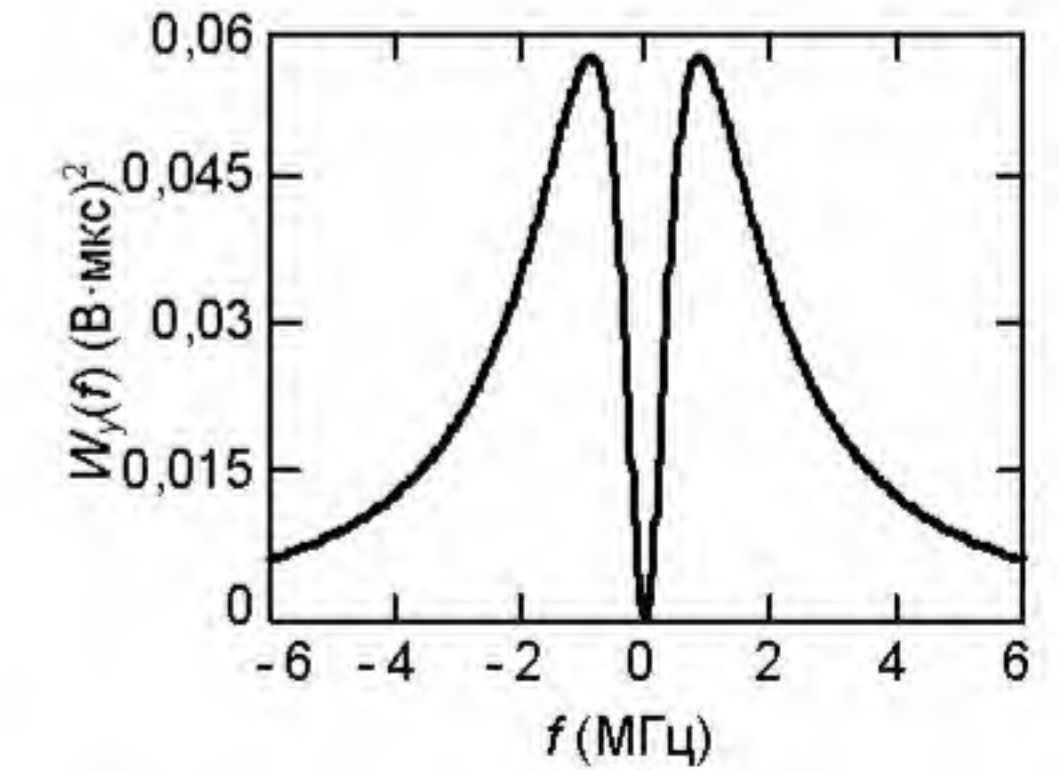


Рис. 1.23. Энергетический спектр сигнала $y(t)$ на выходе ФВЧ.

Для проверки правильности нахождения автокорреляционной функции и энергетического спектра сигнала $y(t)$ также можно воспользоваться теоремой Парсеваля для аналогового импульсного сигнала и свойством преобразования Фурье для АКФ сигнала:

$$E_y = R_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} W_y(f) df \approx 0,36, (B^2 \cdot \text{мкс}), \quad W_y(0) = \int_{-\infty}^{\infty} R_y(t) dt = 0, \quad (1.45)$$

где E_y – энергия сигнала $y(t)$.

1.3.2. Аналоговые периодические сигналы

Рассмотрим процедуру прохождения аналогового периодического сигнала $s_T(t)$ через линейную цепь (рис. 1.24).

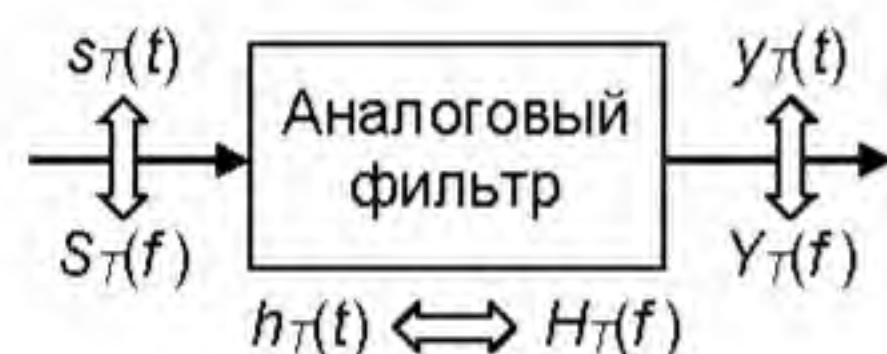


Рис. 1.24. Прохождение аналогового периодического сигнала через линейную цепь.

Для упрощения анализа прохождения периодических сигналов через линейные цепи ИХ фильтра удобно представить в виде периодической функции:

$$h_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(t - kT) = h(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), (ГЦ), \quad (1.46)$$

где $h(t)$ – импульсная характеристика исходного аналогового фильтра, T – период повторения сигнала на входе линейной цепи. В этом случае частотная характеристика фильтра становится дискретной функцией, которая может быть найдена по известной ЧХ аналогового фильтра:

$$H_T[m] = \frac{1}{T} \cdot H\left(\frac{m}{T}\right), (ГЦ), \quad (1.47)$$

$$H_T(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_T[m] \delta\left(f - \frac{m}{T}\right), (б/р). \quad (1.48)$$

Периодическая ИХ и дискретная ЧХ аналогового фильтра связаны друг с другом разложением в ряд Фурье:

Прямой РФ	Обратный РФ
$H_T[m] = \frac{1}{T} \int_0^T h_T(t) e^{-j \frac{2\pi m t}{T}} dt, (ГЦ),$	$h_T(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_T[m] e^{j \frac{2\pi m t}{T}}, (ГЦ).$

Автокорреляционная функция периодической импульсной характеристики $h_T(t)$ аналогового фильтра может быть найдена следующим образом:

$$R_{h_T}(t) = T \cdot h_T(t) \otimes h_T(-t) = \int_0^T h_T(\tau) h_T(t + \tau) d\tau, (ГЦ), \quad (1.49)$$

где « \otimes » – операция круговой свертки.

АКФ периодической ИХ фильтра может быть найдена по известной АКФ исходного аналогового фильтра:

$$R_{h_T}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_h(t - kT) = R_h(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), (ГЦ), \quad (1.50)$$

где « $*$ » – операция линейной свертки.

Дискретная частотная характеристика по мощности аналогового фильтра определяется следующими соотношениями:

$$K_T[m] = \frac{1}{T} \cdot K\left(\frac{m}{T}\right) = T \cdot H_T[m] \cdot H_T^*[m] = T \cdot |H_T[m]|^2, (ГЦ). \quad (1.51)$$

$$K_T(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_T[m] \cdot \delta\left(f - \frac{m}{T}\right), (б/р), \quad (1.52)$$

где « $*$ » – комплексное сопряжение.

Частотная характеристика по мощности и автокорреляционная функция периодической импульсной характеристики линейной цепи связаны между собой рядом Фурье:

Прямой РФ	Обратный РФ
$K_T[m] = \frac{1}{T} \int_0^T R_{h_T}(t) e^{-j \frac{2\pi m t}{T}} dt, (ГЦ),$	$R_{h_T}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_T[m] e^{j \frac{2\pi m t}{T}}, (ГЦ).$

В качестве примера рассмотрим характеристики фильтра для аналоговых периодических сигналов, полученного из исходного фильтра высоких частот первого порядка, описанного в разделе 2.1.

Периодическая импульсная характеристика аналогового фильтра $h_T(t)$, полученная из ИХ исходного ФВЧ (1.38) по формуле (1.46), показана на рис. 1.25.

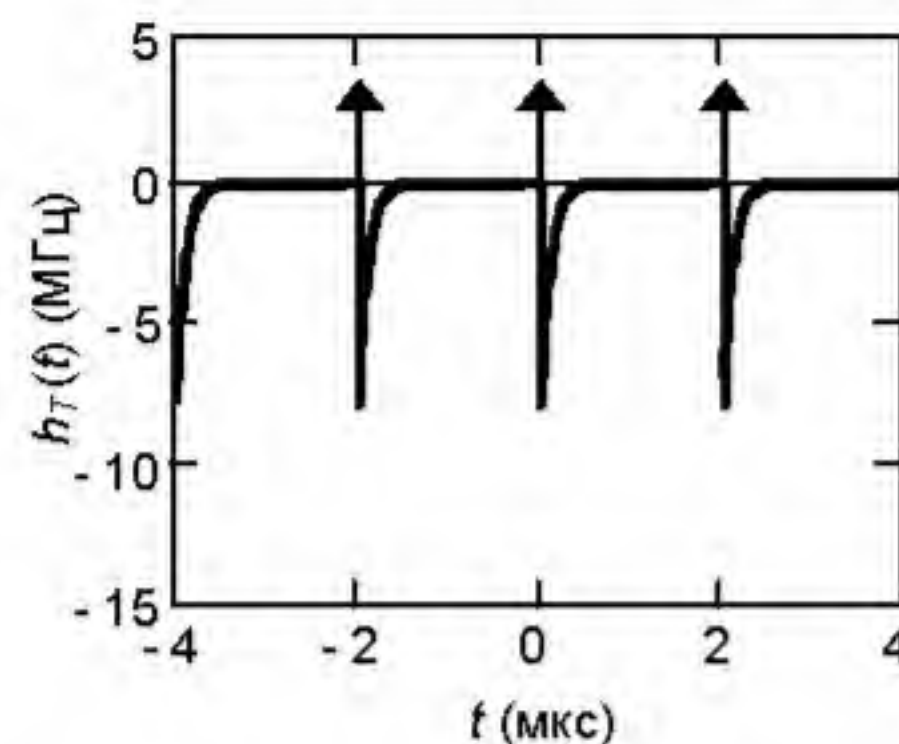


Рис. 1.25. Периодическая импульсная характеристика ФВЧ.

Дискретная ЧХ фильтра $H_T(f)$, найденная по известной частотной характеристике исходного аналогового фильтра по формуле (1.47), показана на рис. 1.26.

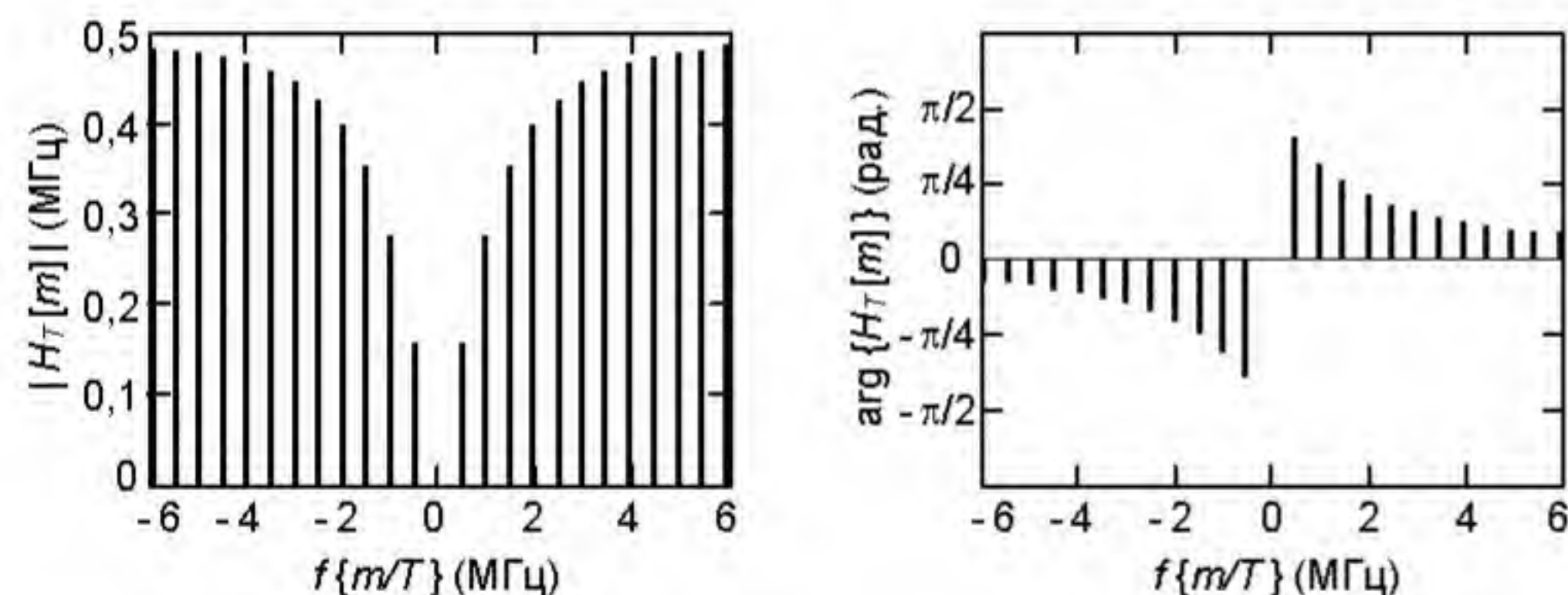


Рис. 1.26. Амплитудная и фазовая характеристики аналогового ФВЧ.

По известной периодической импульсной характеристике $h_T(t)$ аналогового фильтра с помощью формулы (1.49) может быть определена автокорреляционная функция ИХ $R_{h_T}(t)$, показанная на рис. 1.27, а по формуле (1.51) можно оценить дискретную частотную характеристику по мощности фильтра $K_T(f)$, представленную на рис. 1.28.

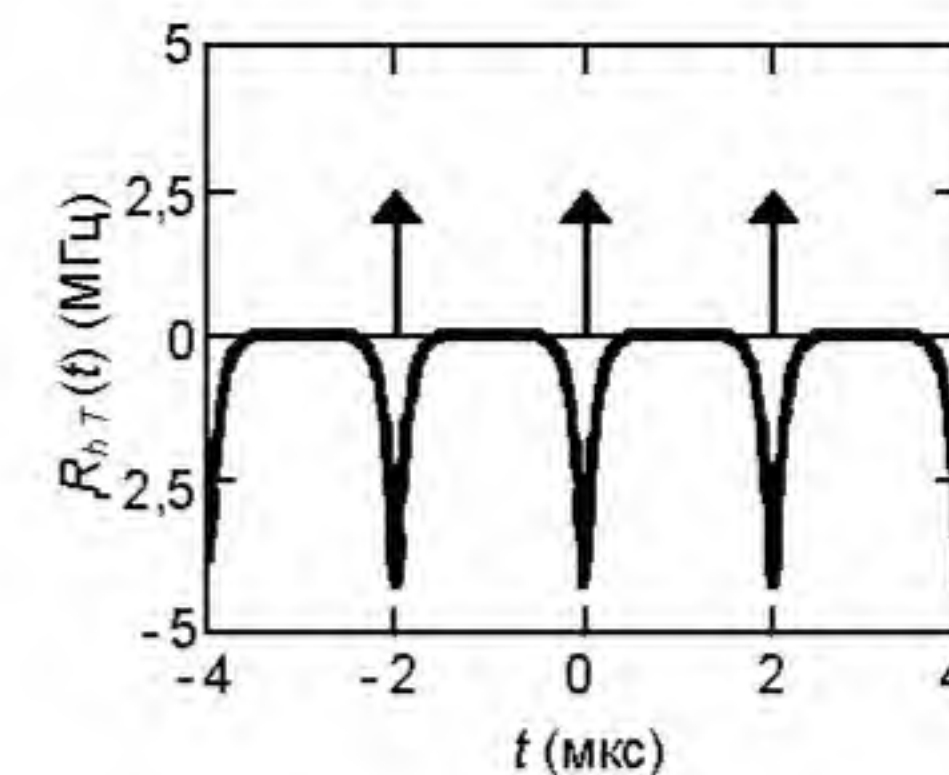


Рис. 1.27. Автокорреляционная функция импульсной характеристики ФВЧ.

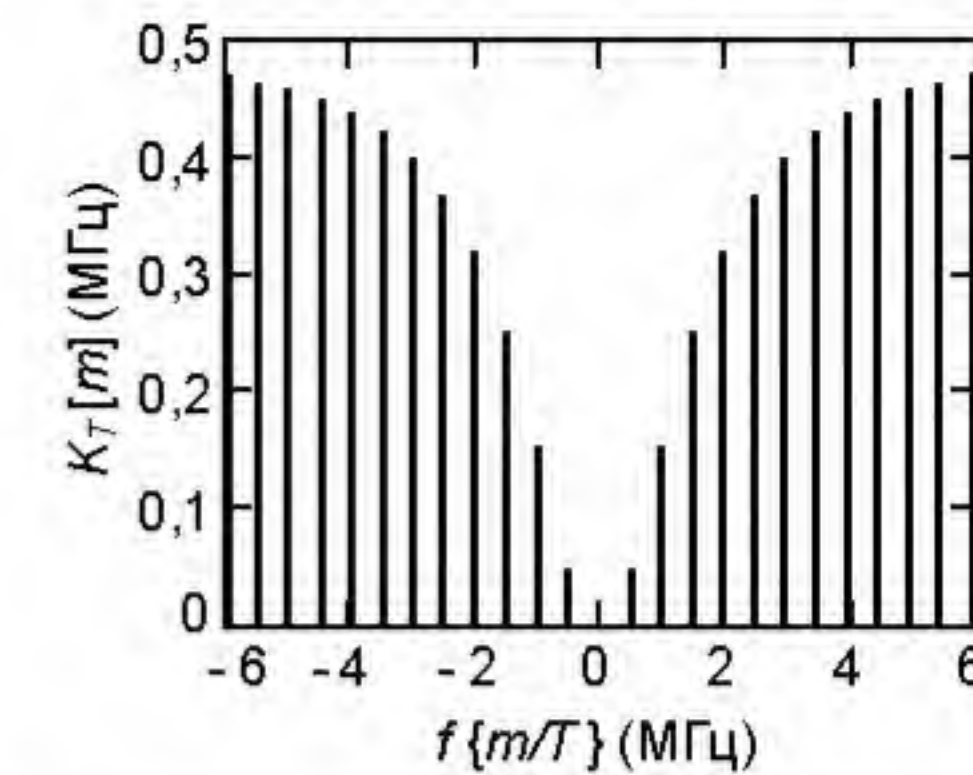


Рис. 1.28. Частотная характеристика ФВЧ по мощности.

Далее рассмотрим процедуру нахождения сигнала на выходе линейной цепи. Аналоговый периодический сигнал на выходе фильтра может быть найден путём линейной свёртки сигнала на входе линейной цепи с импульсной характеристикой фильтра:

$$y_T(t) = s_T(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s_T(\tau) h(t - \tau) d\tau, (B), \quad (1.53)$$

где «*» — операция линейной свертки. Для того чтобы избавиться от необходимости интегрировать в бесконечных пределах можно перейти от линейной свёртки к круговой свёртке периодических сигналов. В этом случае сигнал на выходе фильтра и его спектр могут быть найдены следующим образом:

$$\begin{aligned} y_T(t) &= T \cdot s_T(t) \otimes h_T(t), (B), \\ P\Phi \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \\ Y_T[m] &= T \cdot S_T[m] \cdot H_T[m], (B). \end{aligned} \quad (1.54)$$

Спектр периодического сигнала на выходе аналогового фильтра может быть найден следующим образом:

$$Y_T(f) = S_T(f) \cdot H(f), (B \cdot c). \quad (1.55)$$

Автокорреляционная функция аналогового периодического сигнала на выходе аналогового фильтра может быть найдена несколькими способами:

– по известному сигналу на выходе фильтра:

$$R_{y_T}(t) = y_T(t) \otimes y_T(-t) = \frac{1}{T} \int_0^T y_T(\tau) y_T(t + \tau) d\tau, (B^2); \quad (1.56)$$

– по известной АКФ сигнала на входе фильтра и АКФ импульсной характеристики аналогового фильтра:

$$R_{yT}(t) = T \cdot R_{ST}(t) \otimes R_{hT}(t) = \int_0^T R_{ST}(\tau) R_{hT}(t - \tau) d\tau, (B^2). \quad (1.57)$$

Спектр мощности периодического сигнала на выходе фильтра также может быть найден несколькими способами:

– по известному спектру сигнала на выходе фильтра:

$$P_{yT}[m] = Y_T[m] \cdot Y_T^*[m] = |Y_T[m]|^2, (B^2); \quad (1.58)$$

$$P_{yT}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_{yT}[m] \cdot \delta\left(f - \frac{m}{T}\right), (B^2 \cdot c); \quad (1.59)$$

– по известному спектру мощности сигнала на входе фильтра и частотной характеристике аналогового фильтра по мощности:

$$P_{yT}[m] = T \cdot P_{ST}[m] \cdot K_T[m], (B^2). \quad (1.60)$$

Спектр мощности и автокорреляционная функция аналогового периодического сигнала на выходе фильтра связаны между собой рядом Фурье:

<p>Прямой РФ</p> $P_{yT}[m] = \frac{1}{T} \int_0^T R_{yT}(t) e^{-j \frac{2\pi m t}{T}} dt, (B^2),$	<p>Обратный РФ</p> $R_{yT}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_{yT}[m] e^{j \frac{2\pi m t}{T}}, (B^2).$
--	---

Рассмотрим пример прохождения аналогового периодического сигнала $s_T(t)$ через фильтр высоких частот первого порядка, описанный выше. Сигнал на выходе фильтра $y_T(t)$ и спектр этого сигнала $Y_T[m]$, найденные по формуле (1.54), показаны на рис. 1.29 и 1.30 соответственно.

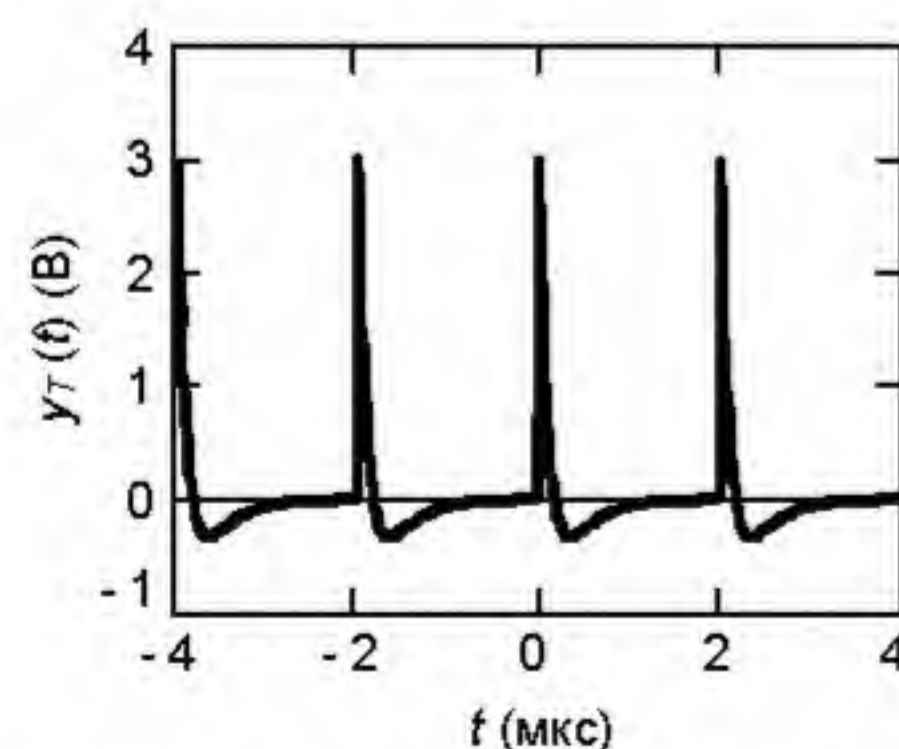


Рис. 1.29. Аналоговый периодический сигнал на выходе ФВЧ.

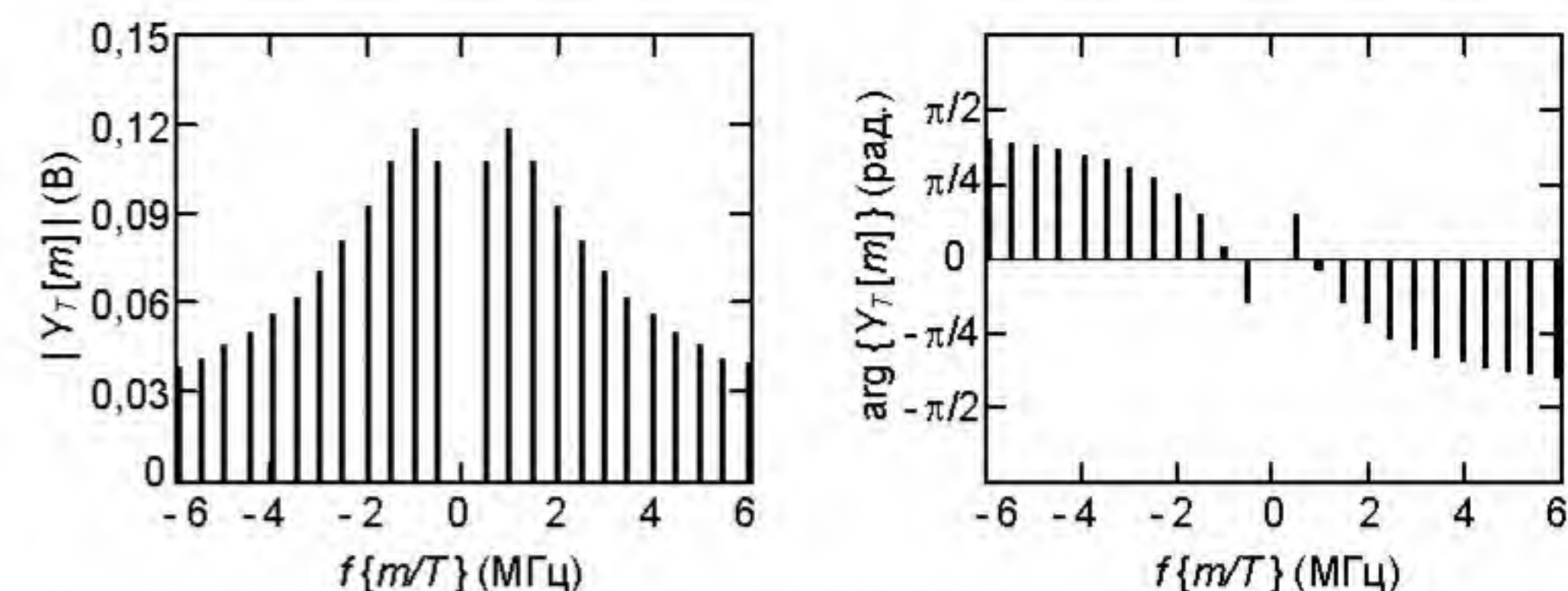


Рис. 1.30. Амплитудный и фазовый спектры сигнала $y_T(t)$ на выходе ФВЧ.

Для нахождения автокорреляционной функции аналогового периодического сигнала на выходе фильтра $R_{yT}(t)$ можно воспользоваться формулами (1.56) или (1.57). Спектр мощности $P_{yT}[m]$ периодического сигнала на выходе ФВЧ может быть оценен с помощью формул (1.58) или (1.60). Полученные АКФ и спектр мощности сигнала на выходе фильтра представлены на рис. 1.31 и 1.32 соответственно.

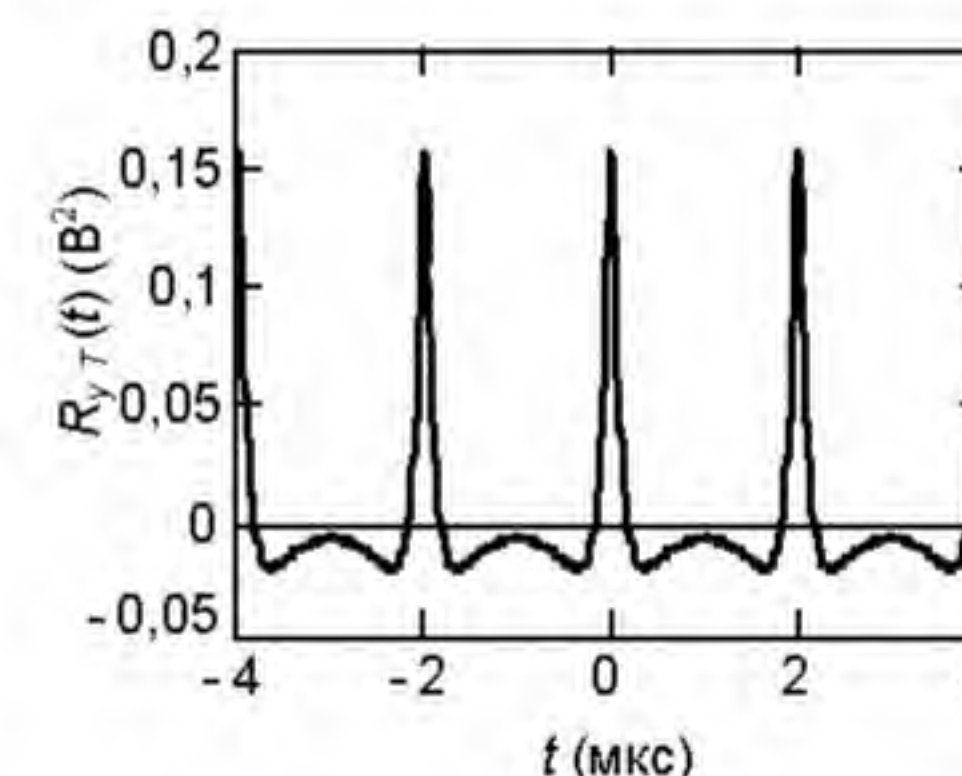


Рис. 1.31. Автокорреляционная функция сигнала $y_T(t)$ на выходе ФВЧ.

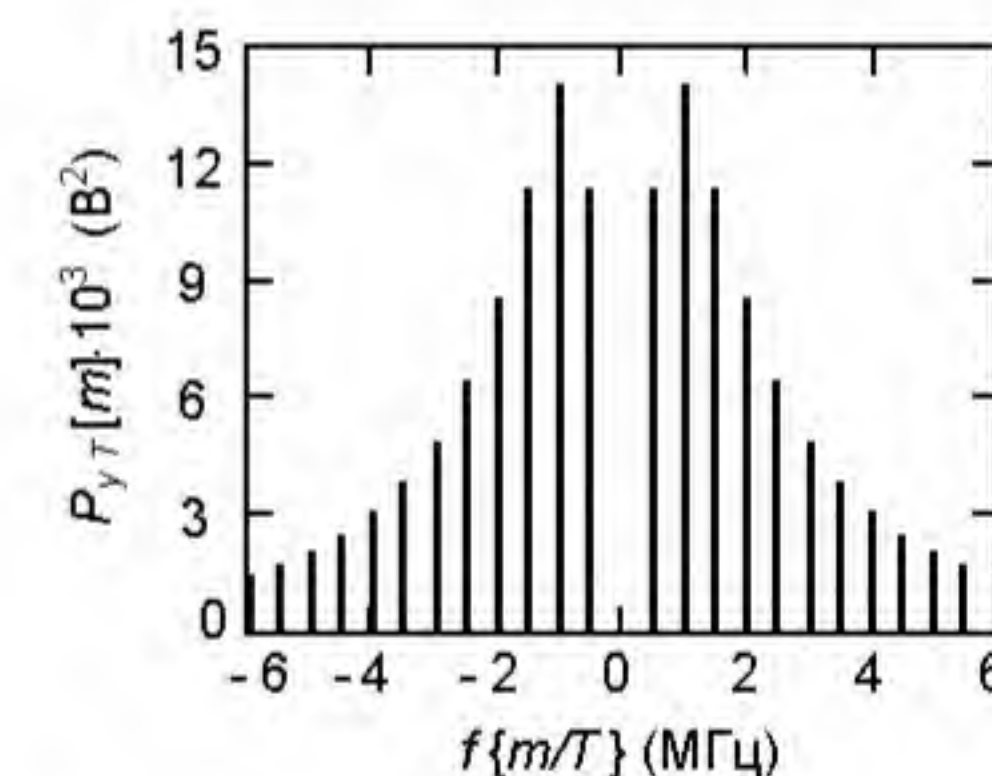


Рис. 1.32. Спектр мощности сигнала $y_T(t)$ на выходе ФВЧ.

Для проверки правильности нахождения автокорреляционной функции и спектра мощности сигнала $y_T(t)$ на выходе фильтра также воспользуемся теоремой Парсеваля для периодических сигналов и свойством разложения в ряд Фурье для АКФ сигнала:

$$P_{ycp} = R_{yT}(0) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_{yT}[m] \approx 0,17, (B^2), \quad P_{yT}[0] = \frac{1}{T} \int_0^T R_{yT}(t) dt = 0, \quad (1.61)$$

где P_{ycp} – средняя за период мощность сигнала $y_T(t)$.

2. АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

2.1. Дискретные импульсные сигналы

2.1.1. Спектральная плотность дискретных импульсных сигналов

Дискретное во времени преобразование Фурье (ДВПФ) $s_{\Delta}[n] \Leftrightarrow S_{\Delta}(f)$

Дискретный импульсный сигнал получается из аналогового сигнала путём дискретизации периодической последовательностью δ -функций, отстоящих друг от друга на интервал дискретизации T_{δ} и имеющих вес, равный T_{δ} :

$$s_{\Delta}(t) = T_{\delta} \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n T_{\delta}) \delta(t - n T_{\delta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{\Delta}[n] \delta(t - n T_{\delta}), \quad (\text{В}), \quad (2.1)$$

$$s_{\Delta}[n] = T_{\delta} \cdot s(n T_{\delta}), \quad (\text{В} \cdot \text{с}). \quad (2.2)$$

Спектр дискретного импульсного сигнала определяется с помощью прямого ДВПФ:

$$S_{\Delta}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_{\Delta}[n] e^{-j2\pi f n T_{\delta}}, \quad (\text{В} \cdot \text{с}), \quad (2.3)$$

где T_{δ} – интервал дискретизации сигнала.

Обратное ДВПФ позволяет восстановить дискретный импульсный сигнал $s_{\Delta}[n]$ из его спектра:

$$s_{\Delta}[n] = T_{\delta} \cdot \int_0^{1/T_{\delta}} S_{\Delta}(f) e^{j2\pi f n T_{\delta}} df, \quad (\text{В} \cdot \text{с}). \quad (2.4)$$

Спектр дискретного импульсного сигнала также может быть получен по известному спектру аналогового импульсного сигнала:

$$S_{\Delta}(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S\left(f - \frac{k}{T_{\delta}}\right), \quad (\text{В} \cdot \text{с}). \quad (2.5)$$

2.1.2. Автокорреляционная функция дискретных импульсных сигналов

Автокорреляционная функция дискретного импульсного сигнала определяется следующим соотношением:

$$R_{s_{\Delta}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{s_{\Delta}}[n] \delta(t - n T_{\delta}), \quad (\text{В}^2 \cdot \text{с}), \quad (2.6)$$

$$R_{s_{\Delta}}[n] = s_{\Delta}[n] * s_{\Delta}[-n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_{\Delta}[k] s_{\Delta}[n+k], \quad (\text{В} \cdot \text{с})^2, \quad (2.7)$$

где «*» – операция линейной дискретной свертки¹.

2.1.3. Энергетический спектр дискретных импульсных сигналов

Энергетический спектр дискретного импульсного сигнала:

$$W_{s_{\Delta}}(f) = S_{s_{\Delta}}(f) \cdot S_{s_{\Delta}}^*(f) = |S_{s_{\Delta}}(f)|^2, \quad (\text{В} \cdot \text{с})^2. \quad (2.8)$$

Энергетический спектр и автокорреляционная функция дискретного импульсного сигнала $s_{\Delta}[n]$ связаны между собой ДВПФ:

$$\begin{array}{ll} \text{Прямое ДВПФ} & \text{Обратное ДВПФ} \\ W_{s_{\Delta}}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{s_{\Delta}}[n] e^{-j2\pi f n T_{\delta}}, \quad (\text{В} \cdot \text{с})^2, & R_{s_{\Delta}}[n] = T_{\delta} \cdot \int_0^{1/T_{\delta}} W_{s_{\Delta}}(f) e^{j2\pi f n T_{\delta}} df, \quad (\text{В} \cdot \text{с})^2. \end{array}$$

Рассмотрим дискретный импульсный сигнал $s_{\Delta}[n]$, полученный из исходного аналогового импульсного сигнала (1.3) при дискретизации его с частотой дискретизации $f_{\delta} = 5$ МГц (период дискретизации $T_{\delta} = 0,2$ мкс) согласно выражению (2.2). Дискретный сигнал показан на рис. 2.1.

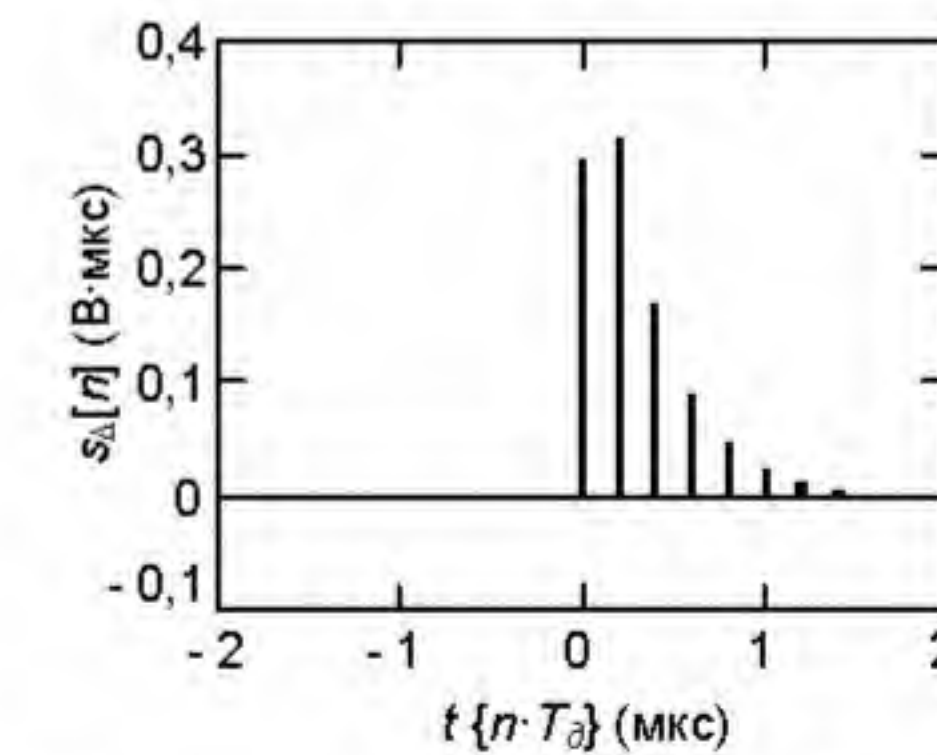


Рис. 2.1. Дискретный импульсный сигнал $s_{\Delta}[n]$.

¹ Линейная свёртка дискретных импульсных сигналов:

$$y_{\Delta}[n] = s_{\Delta}[n] * x_{\Delta}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_{\Delta}[k] x_{\Delta}[n-k]$$

$$\begin{array}{ccc} \text{ДВПФ} & \Updownarrow & \Updownarrow \\ Y_{\Delta}(f) & = & S_{\Delta}(f) \cdot X_{\Delta}(f) \end{array}$$

Спектр дискретного сигнала $s_\Delta[n]$ можно определить с помощью выражений (2.3) или (2.5):

$$S_\Delta(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{A}{j2\pi \left(f - \frac{k}{T_\delta}\right) + \alpha} = AT_\delta \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{(\alpha + j2\pi f)T_\delta} - 1} \right). \quad (2.9)$$

Амплитудный и фазовый спектры сигнала $s_\Delta[n]$ показаны на рис. 2.2. Согласно свойству преобразования Фурье:

$$S_\Delta(0) = AT_\delta \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\alpha T_\delta} - 1} \right) \approx 0,99, (\text{В} \cdot \text{мкс}). \quad (2.10)$$

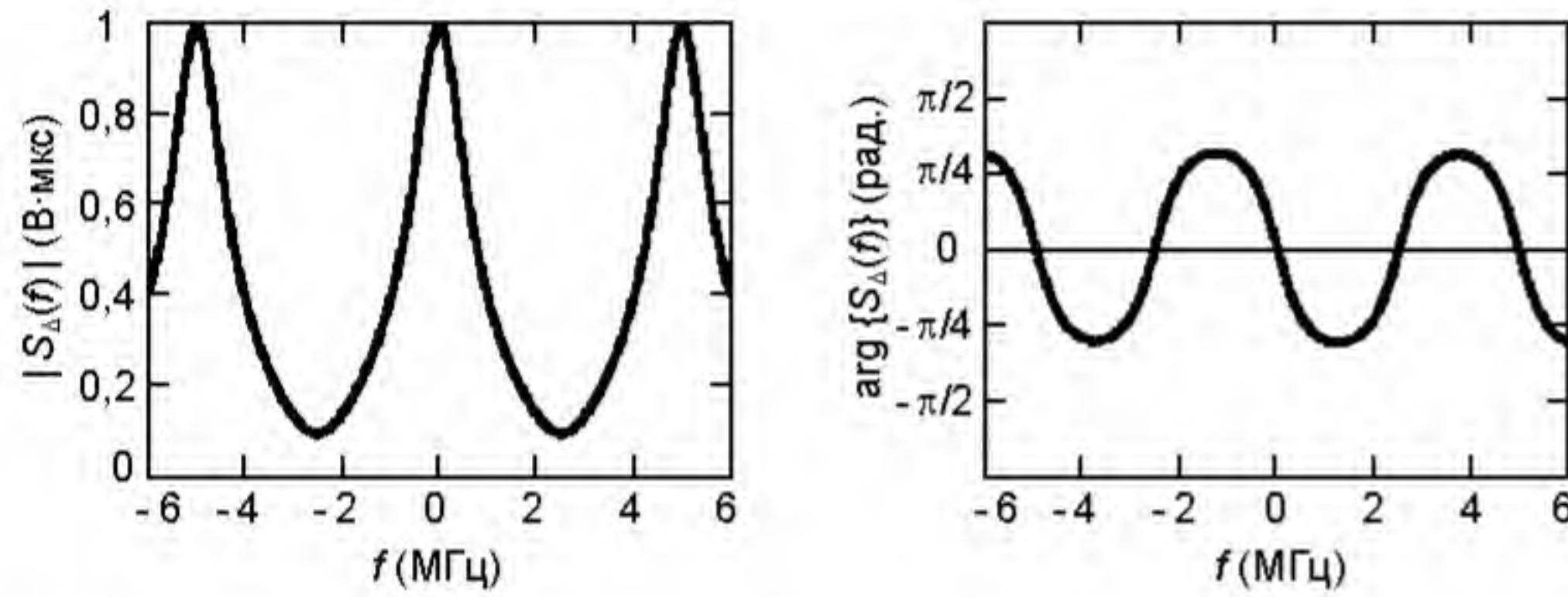


Рис. 2.2. Амплитудный и фазовый спектры дискретного импульсного сигнала $s_\Delta[n]$.

Автокорреляционная функция дискретного импульсного сигнала может быть найдена с помощью операции свертки (2.7), а энергетический спектр – с помощью выражения (2.8). АКФ и энергетический спектр сигнала $s_\Delta[n]$ показаны на рис. 2.3 и 2.4 соответственно.

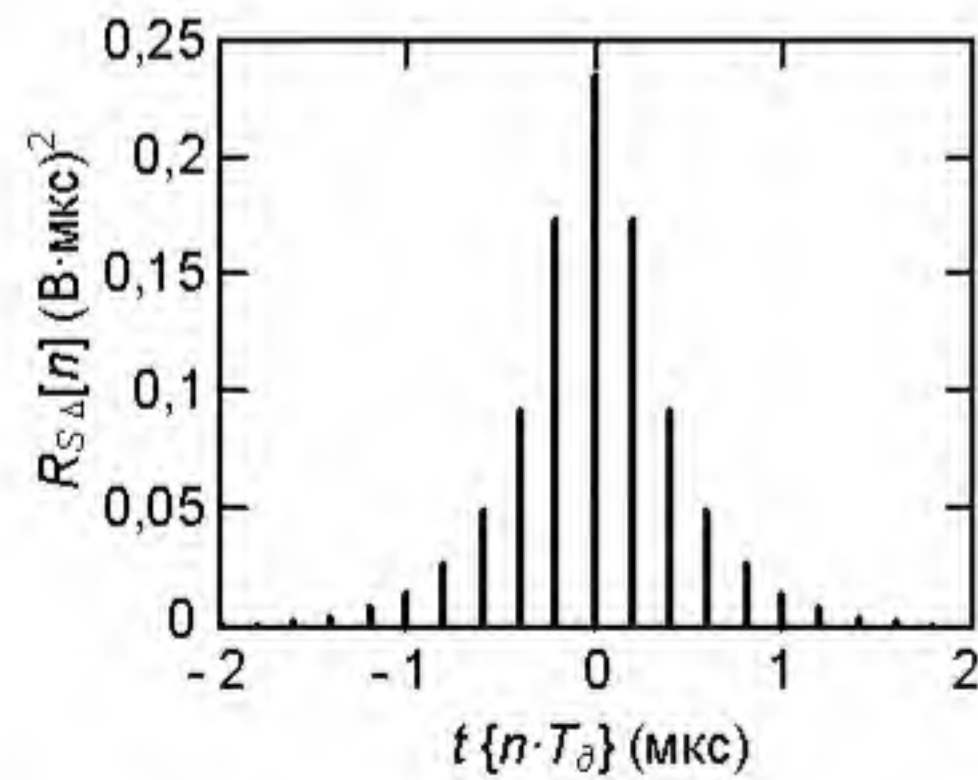


Рис. 2.3. Автокорреляционная функция сигнала $s_\Delta[n]$.

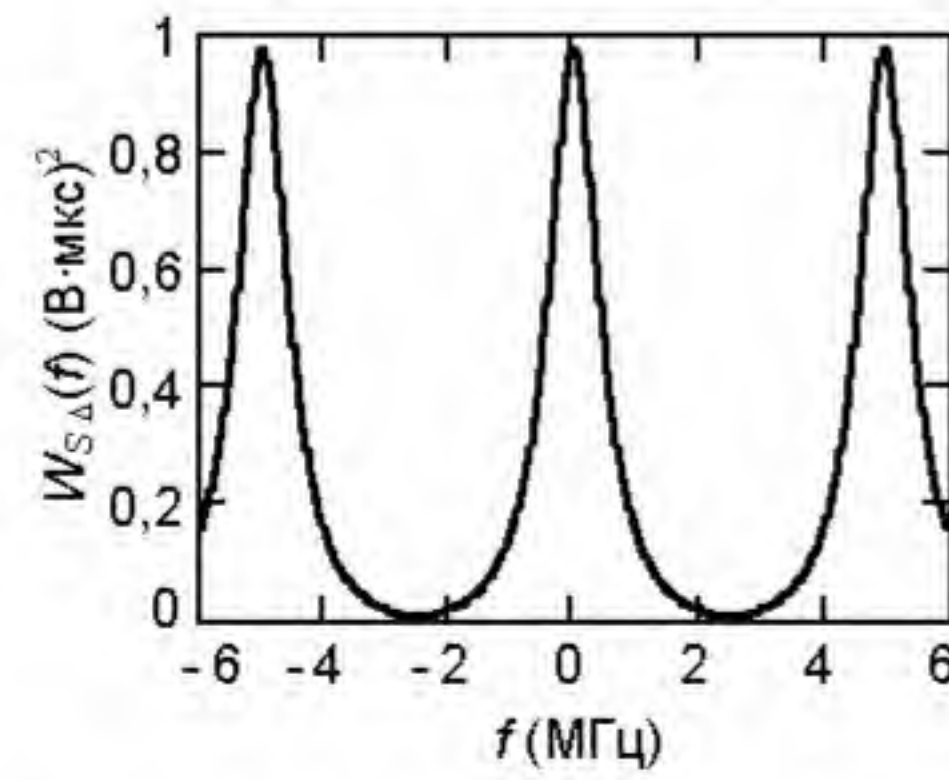


Рис. 2.4. Энергетический спектр сигнала $s_\Delta[n]$.

Согласно теореме Парсеваля для дискретного импульсного сигнала и свойствам ДПФ для АКФ сигнала:

$$R_{S_\Delta}[0] = T_\delta \int_{-F_\delta/2}^{F_\delta/2} W_{S_\Delta}(f) df \approx 0,23, (\text{В} \cdot \text{мкс})^2, \quad (2.11)$$

$$W_{S_\Delta}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{S_\Delta}[n] \approx 0,97, (\text{В} \cdot \text{мкс})^2.$$

2.2. Дискретные периодические сигналы

2.2.1. Спектр дискретных периодических сигналов

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) $s_N[n] \Leftrightarrow S_N[m]$

Дискретный периодический сигнал $s_N[n]$ может быть получен несколькими способами: либо из дискретного импульсного сигнала $s_\Delta[n]$ путём суммирования его задержанных копий через равные интервалы времени:

$$s_N[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_\Delta[n - kN], (\text{В} \cdot \text{с}), \quad (2.12)$$

$$s_N(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_N[n] \delta(t - nT_\delta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_\Delta(t - kT), (\text{В}), \quad (2.13)$$

где $T = N \cdot T_\delta$ – период повторения дискретного сигнала (N – натуральное число), либо из аналогового периодического сигнала $s_T(t)$ путём дискретизации периодической последовательностью δ -функций, отстоящих друг от друга на интервал дискретизации T_δ , и имеющих вес, равный T_δ :

$$s_N[n] = T_\delta \cdot s_T(nT_\delta), (\text{В} \cdot \text{с}). \quad (2.14)$$

Спектр дискретного периодического сигнала определяется с помощью прямого ДПФ:

$$S_N[m] = \frac{1}{T} \int_0^T s_N(t) e^{-j\frac{2\pi m t}{T}} dt = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{n=-\infty}^{\infty} s_N[n] \delta(t - nT_\delta) e^{-j\frac{2\pi m t}{T}} dt =$$

$$= \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} s_N[n] \int_0^T \delta(t - nT_\delta) e^{-j\frac{2\pi m t}{T}} dt = \frac{1}{NT_\delta} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} s_N[n] e^{-j\frac{2\pi m n}{N}}, \text{В}. \quad (2.15)$$

Обратное ДПФ позволяет восстановить дискретный периодический сигнал $s_N[n]$ из его спектра:

$$s_N[n] = T_\delta \cdot \sum_{m=0}^{N-1} S_N[m] e^{j \frac{2\pi}{N} nm}, \quad (\text{В}\cdot\text{с}). \quad (2.16)$$

Спектр дискретного периодического сигнала также может быть найден по известному спектру дискретного импульсного сигнала:

$$S_N[m] = \frac{1}{NT_\delta} \cdot S_\Delta\left(\frac{m}{NT_\delta}\right), \quad (\text{В}), \quad (2.17)$$

$$S_N(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_N[m] \cdot \delta\left(f - \frac{m}{NT_\delta}\right), \quad (\text{В}\cdot\text{с}). \quad (2.18)$$

Дискретный периодический сигнал $s_N[n]$ также может быть найден с помощью обратного ДВПФ от $S_N(f)$:

$$\begin{aligned} s_N[n] &= T_\delta \cdot \int_0^{1/T_\delta} S_N(f) e^{j2\pi n T_\delta f} df = T_\delta \cdot \int_0^{1/T_\delta} \sum_{m=-\infty}^{\infty} S_N[m] \delta\left(f - \frac{m}{NT_\delta}\right) e^{j2\pi n T_\delta f} df \\ &= T_\delta \cdot \sum_{m=0}^{N-1} S_N[m] e^{j \frac{2\pi}{N} nm}, \quad \text{В}\cdot\text{с}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

2.2.2. Автокорреляционная функция дискретных периодических сигналов

Автокорреляционная функция дискретного периодического сигнала определяется следующим образом:

$$R_{SN}[n] = s_N[n] \otimes s_N[-n] = \frac{1}{NT_\delta} \sum_{k=0}^{N-1} s_N[k] s_N[n+k], \quad (\text{В}^2\cdot\text{с}), \quad (2.20)$$

$$R_{SN}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{SN}[n] \delta(t - nT_\delta), \quad (\text{В}^2), \quad (2.21)$$

где « \otimes » – операция дискретной круговой свертки¹.

¹ Круговая (циклическая) свертка дискретных периодических сигналов:

$$y_N[n] = s_N[n] \otimes x_N[n] = \frac{1}{NT_\delta} \sum_{k=0}^{N-1} s_N[k] x_N[n-k]$$

$$\begin{array}{ccc} \text{ДПФ} & \Updownarrow & \Updownarrow \\ Y_N[m] & = & S_N[m] \cdot X_N[m] \end{array}$$

2.2.3. Спектр мощности дискретных периодических сигналов

Спектр мощности дискретного периодического сигнала:

$$P_{SN}[m] = S_{SN}[m] \cdot S_{SN}^*[m] = |S_{SN}[m]|^2, \quad (\text{В}^2), \quad (2.22)$$

$$P_{SN}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_{SN}[m] \delta\left(f - \frac{m}{NT_\delta}\right), \quad (\text{В}^2\cdot\text{с}). \quad (2.23)$$

Прямое ДПФ	Обратное ДПФ
$P_{SN}[m] = \frac{1}{NT_\delta} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} R_{SN}[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} nm}, \quad (\text{В}^2),$	$R_{SN}[n] = T_\delta \cdot \sum_{m=0}^{N-1} P_{SN}[m] e^{j \frac{2\pi}{N} nm}, \quad (\text{В}^2\cdot\text{с}).$

Дискретный периодический сигнал $s_N[n]$, полученный из дискретного импульсного сигнала $s_\Delta[n]$ с помощью выражения (2.12) для $N = 10$, показан на рис. 2.5.

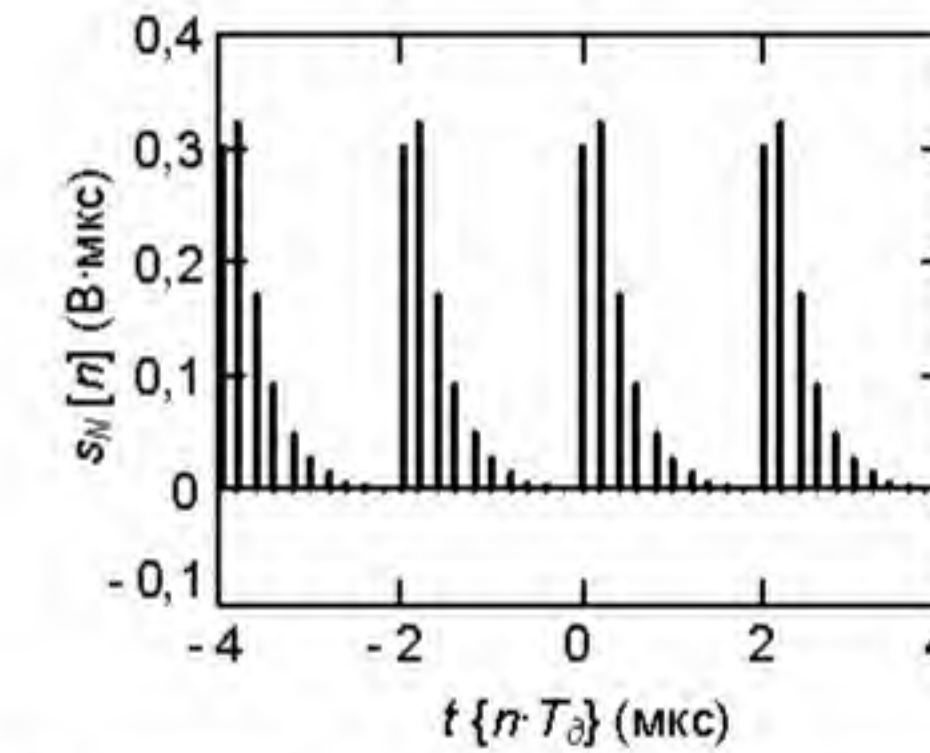


Рис. 2.5. Дискретный периодический сигнал $s_N[n]$.

Спектр сигнала $s_N[n]$ найдем с помощью выражения ДПФ (2.15). Амплитудный и фазовый спектры сигнала $s_N[n]$ показаны на рис. 2.6.

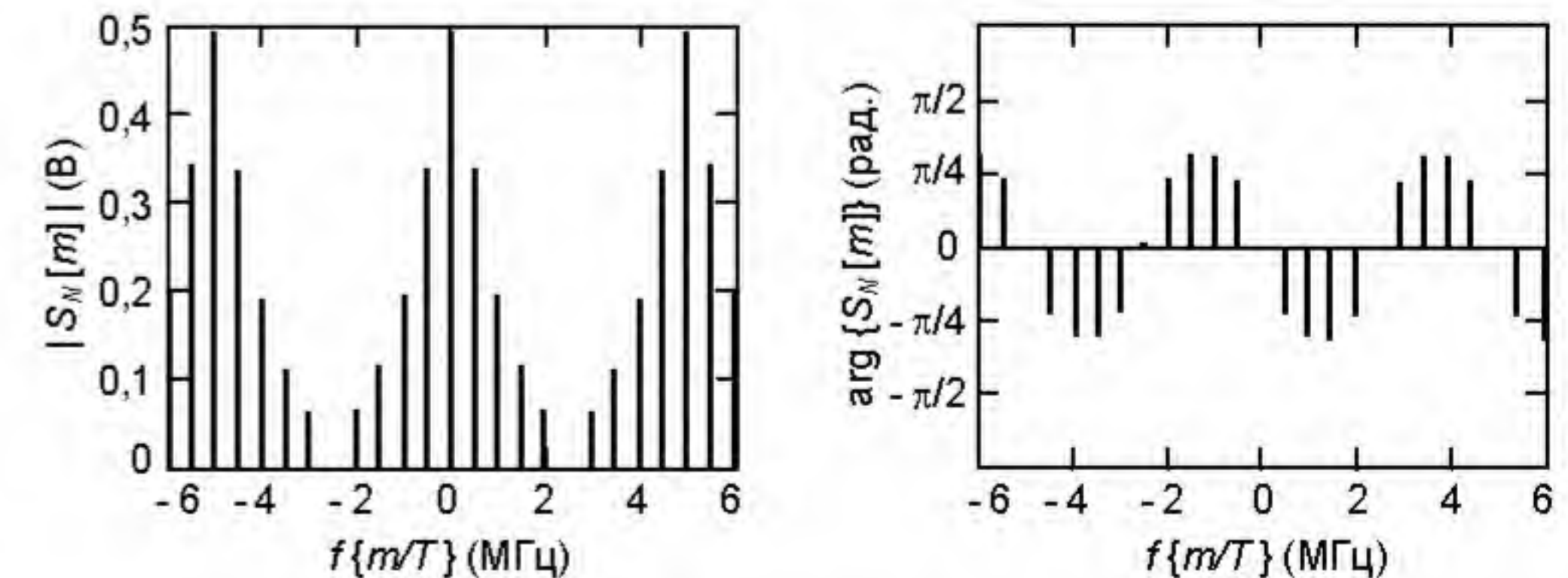


Рис. 2.6. Амплитудный и фазовый спектры дискретного периодического сигнала $s_N[n]$.

Согласно свойству ДПФ:

$$S_N[0] = \frac{1}{NT_\delta} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} s_N[n] \approx 0,49, \text{ (В)}. \quad (2.24)$$

Автокорреляционная функция дискретного периодического сигнала может быть найдена с помощью операции круговой свертки (2.20), а спектр мощности – с помощью выражения (2.22). АКФ и спектр мощности сигнала $s_N[n]$ показаны на рис. 2.7 и 2.8 соответственно.

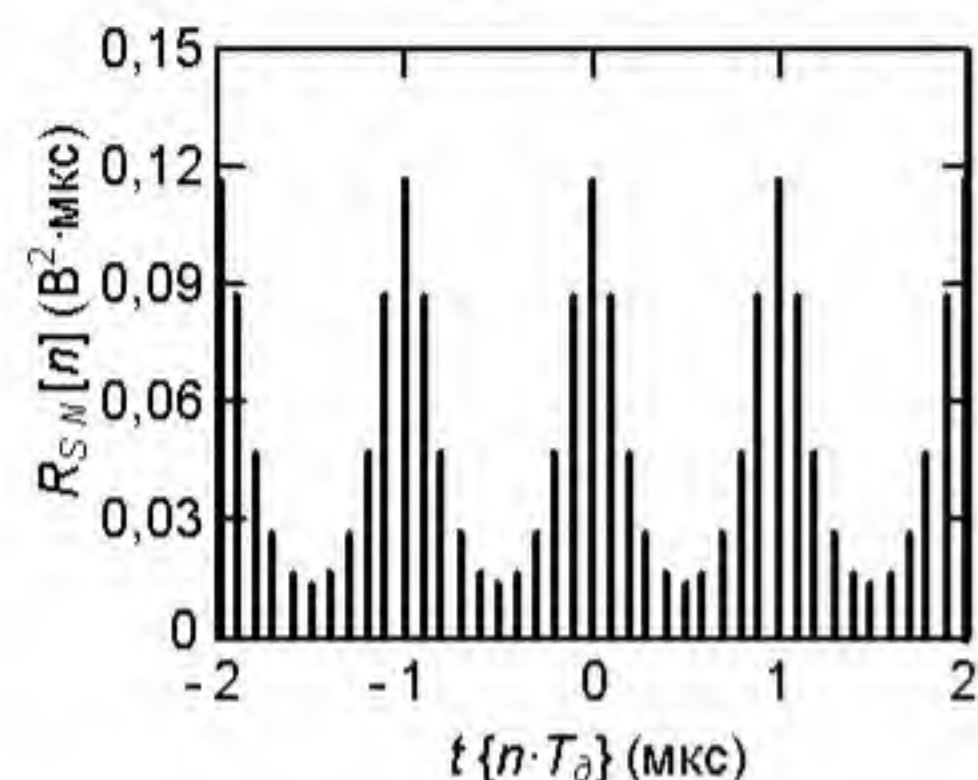


Рис. 2.7. Автокорреляционная функция сигнала $s_N[n]$.

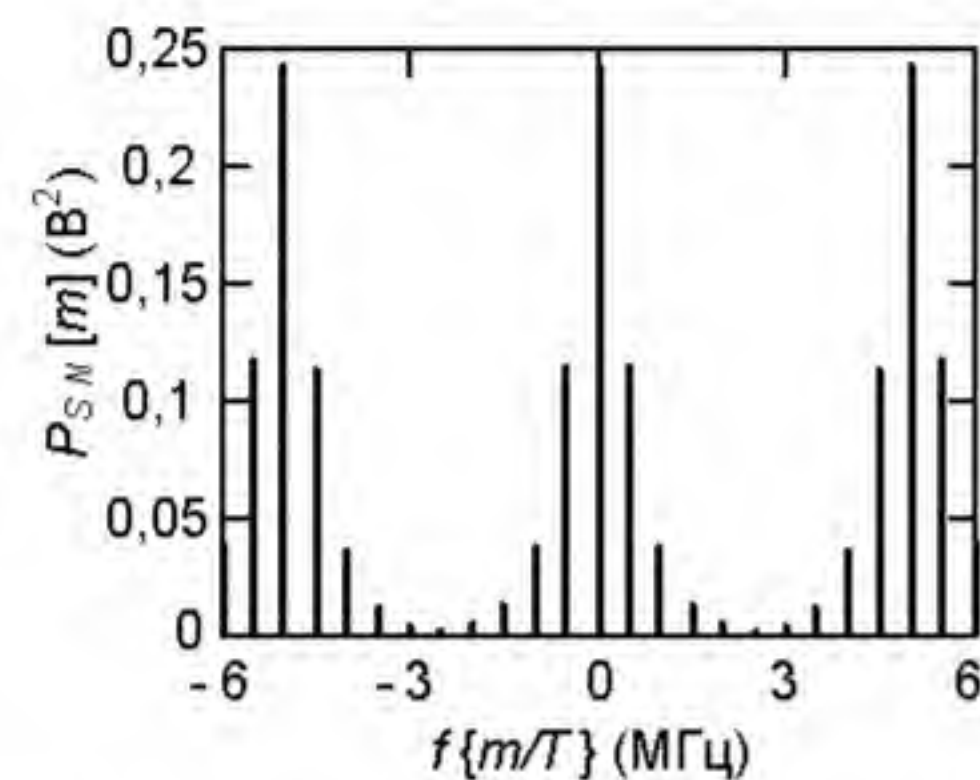


Рис. 2.8. Спектр мощности сигнала $s_N[n]$.

Согласно теореме Парсеваля для дискретного периодического сигнала:

$$\begin{aligned} R_{S_N}[0] &= T_\delta \cdot \sum_{m=0}^{N-1} P_{S_N}[m] \approx 0,12, \text{ (В}^2 \cdot \text{мкс)}, \\ P_{S_N}[0] &= \frac{1}{NT_\delta} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} R_{S_N}[n] \approx 0,24, \text{ (В}^2). \end{aligned} \quad (2.25)$$

2.3. Анализ прохождения дискретных сигналов через линейные цепи

2.3.1. Дискретные импульсные сигналы

Проведем анализ прохождения дискретного импульсного сигнала $s_\Delta[n]$ через линейную цепь (рис. 2.9).

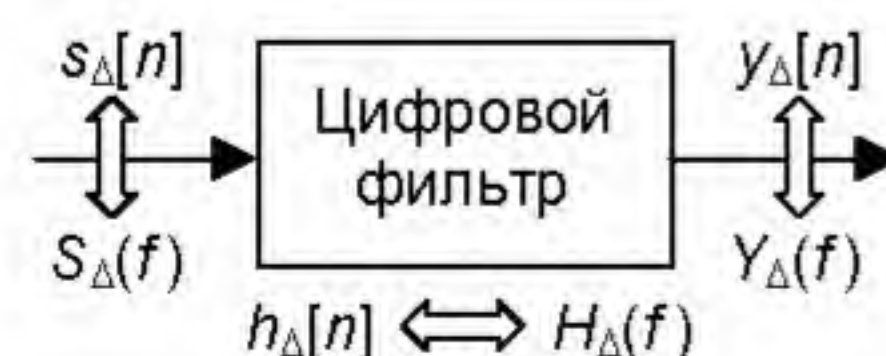


Рис. 2.9. Прохождение дискретного импульсного сигнала через линейную цепь.

Импульсная характеристика цифрового фильтра может быть получена, например, путём дискретизации периодической последовательностью δ -функций, отстоящих друг от друга на интервал дискретизации T_δ , и имеющих вес, равный T_δ , импульсной характеристики аналогового фильтра-прототипа $h(t)$:

$$h_\Delta(t) = T_\delta \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(nT_\delta) \delta(t - nT_\delta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_\Delta[n] \delta(t - nT_\delta), \text{ (Гц)}, \quad (2.26)$$

$$h_\Delta[n] = T_\delta \cdot h(nT_\delta), \text{ (б/п)}, \quad (2.27)$$

где T_δ – интервал дискретизации сигнала $s_\Delta[n]$. Метод синтеза цифрового фильтра путем дискретизации импульсной характеристики аналогового фильтра-прототипа называется методом инвариантной импульсной характеристики [12].

Частотная характеристика цифрового фильтра может быть получена по известной частотной характеристике аналогового фильтра-прототипа $H(f)$:

$$H_\Delta(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H\left(f - \frac{k}{T_\delta}\right), \text{ (б/п)}. \quad (2.28)$$

Другим способом нахождения частотной характеристики цифрового фильтра $H_\Delta(f)$ по известной системной передаточной функции $H(p)$ аналогового фильтра-прототипа является метод билинейного преобразования, подробно рассмотренный в [12]. Суть метода билинейного преобразования сводится к тому, что полюса на p -плоскости системной передаточной функции $H(p)$ аналогового фильтра-прототипа заменяются полюсами на z -плоскости:

$$\tilde{H}(z) = H(p) \Big|_{p=\frac{2}{T_\delta} \frac{z-1}{z+1}}, \quad (2.29)$$

где T_δ – период дискретизации, после чего осуществляется переход от системной передаточной функции цифрового фильтра $\tilde{H}(z)$ к его частотной характеристике путём замены

$$H_\Delta(f) = \tilde{H}(z) \Big|_{z=e^{-j2\pi f T_\delta}}. \quad (2.30)$$

Импульсная и частотная характеристики цифрового фильтра связаны друг с другом дискретным во времени преобразованием Фурье:

$$\begin{array}{ll} \text{Прямое ДВПФ} & \text{Обратное ДВПФ} \\ H_{\Delta}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{\Delta}[n] e^{-j2\pi f n T_{\Delta}}, (\text{б/р}), & h_{\Delta}[n] = T_{\Delta} \cdot \int_0^{1/T_{\Delta}} H_{\Delta}(f) e^{j2\pi f n T_{\Delta}} df, (\text{б/р}). \end{array}$$

Автокорреляционная функция импульсной характеристики $h_{\Delta}[n]$ цифрового фильтра может быть определена следующим образом:

$$R_{h_{\Delta}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{h_{\Delta}}[n] \delta(t - n T_{\Delta}), (\text{Гц}), \quad (2.31)$$

$$R_{h_{\Delta}}[n] = h_{\Delta}[n] * h_{\Delta}[-n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{\Delta}[k] h_{\Delta}[n+k], (\text{б/р}), \quad (2.32)$$

где «*» – операция линейной свертки.

Энергетическая частотная характеристика цифрового фильтра определяется соотношением:

$$G_{\Delta}(f) = H_{\Delta}(f) \cdot H_{\Delta}^*(f) = |H_{\Delta}(f)|^2, (\text{б/р}), \quad (2.33)$$

где «*» – комплексное сопряжение.

Энергетическая частотная характеристика и автокорреляционная функция цифрового фильтра связаны между собой ДВПФ:

$$\begin{array}{ll} \text{Прямое ДВПФ} & \text{Обратное ДВПФ} \\ G_{\Delta}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{h_{\Delta}}[n] e^{-j2\pi f n T_{\Delta}}, (\text{б/р}), & R_{h_{\Delta}}[n] = T_{\Delta} \cdot \int_0^{1/T_{\Delta}} G_{\Delta}(f) e^{j2\pi f n T_{\Delta}} df, (\text{б/р}). \end{array}$$

В качестве примера рассмотрим процедуру синтеза цифрового фильтра высоких частот по аналоговому прототипу двумя способами. Импульсная характеристика цифрового фильтра $h_{\Delta}[n]$, полученная путём дискретизации периодической последовательностью δ -функций импульсной характеристики аналогового фильтра-прототипа $h(t)$, определяемой выражением (1.38), определяется следующим соотношением:

$$h_{\Delta}[n] = T_{\Delta} \cdot h(n T_{\Delta}) = A \delta[n] - \beta \cdot \exp(-\beta \cdot n T_{\Delta}) \cdot u[n], (\text{б/р}), \quad (2.34)$$

где $u[n]$ – дискретная функция Хевисайда, A – весовой коэффициент дискретной δ -функции, определяемый согласно свойству преобразования Фурье:

$$H(0) = \sum_{n=0}^{\infty} h_{\Delta}[n] = A \delta[n] - \sum_{n=0}^{\infty} \beta \cdot \exp(-\beta \cdot n T_{\Delta}) \cdot u[n], \quad (2.35)$$

где $H(0)$ – значение частотной характеристики цифрового фильтра в нуле.

При синтезе цифрового фильтра методом билинейного преобразования из системной передаточной функции аналогового фильтра, определяемой соотношением

$$H(p) = \frac{P}{p + \beta} \quad (2.36)$$

согласно описанной выше методике получим импульсную $h_{\Delta}[n]$ и частотную $H_{\Delta}(f)$ характеристики фильтра. Дискретная импульсная характеристика цифрового фильтра, полученная методом инвариантной импульсной характеристики, показана на рис. 2.10 а). Импульсная характеристика, полученная методом билинейного преобразования, показана на рис. 2.10 б). Из рисунка видно, что импульсные характеристики практически идентичны друг другу, поэтому далее будем рассматривать цифровой фильтр, синтезированный методом билинейного преобразования.

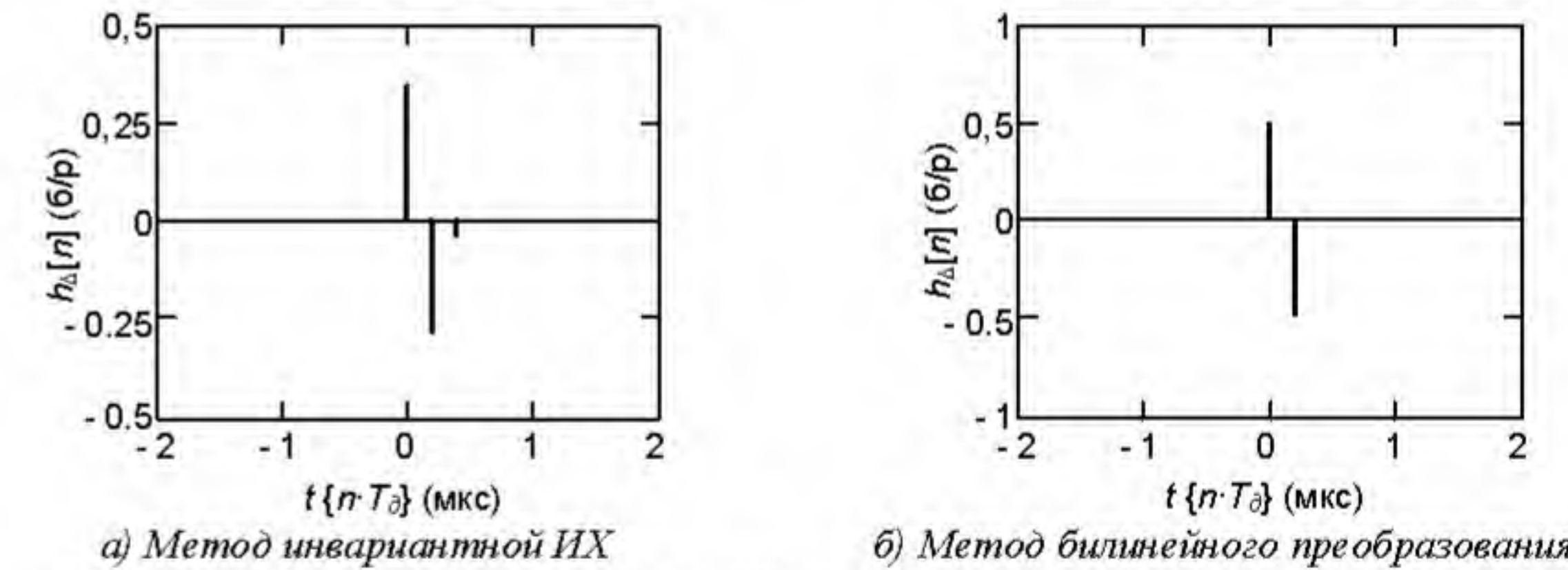


Рис. 2.10. Импульсные характеристики цифрового фильтра высоких частот.

По известной импульсной характеристике фильтра $h_{\Delta}[n]$ с помощью дискретного во времени преобразования Фурье определим частотную характеристику цифрового фильтра $H_{\Delta}(f)$, показанную на рис. 2.11:

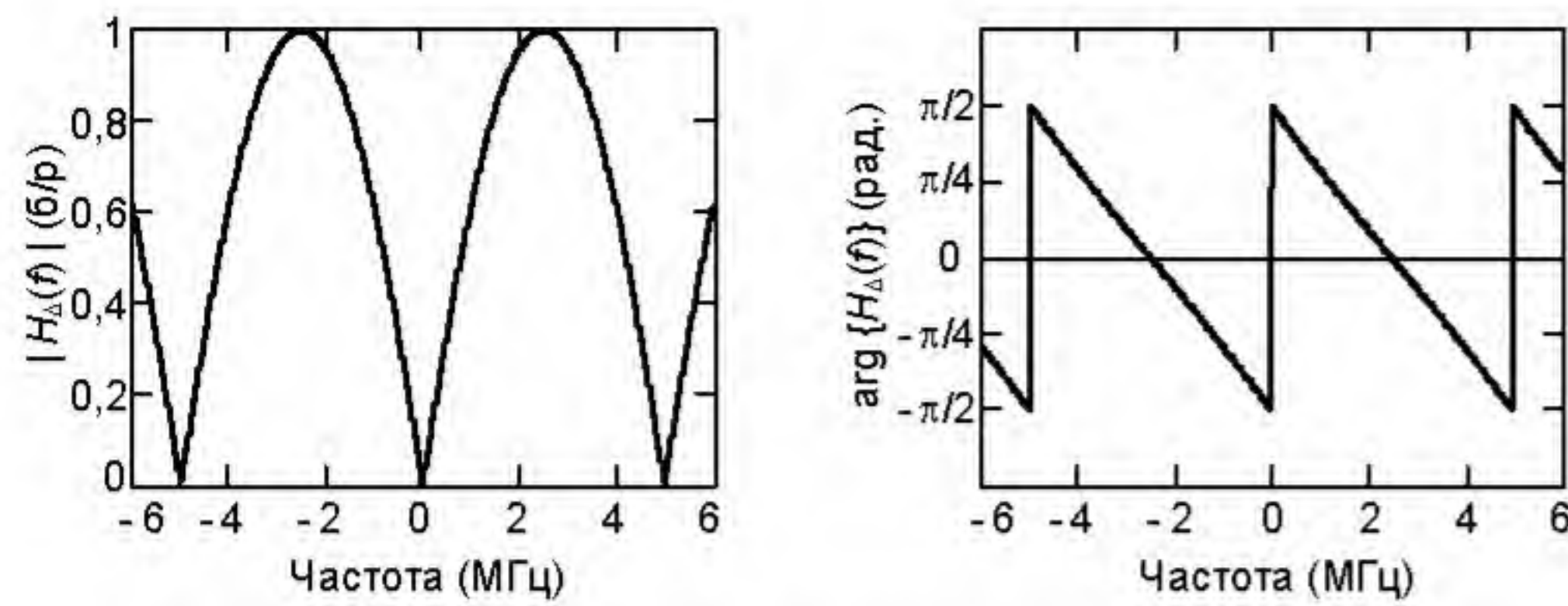


Рис. 2.11. Амплитудная и фазовая характеристики цифрового ФВЧ.

По известной периодической импульсной характеристике цифрового фильтра с помощью формулы (2.32) может быть определена автокорреляционная функция $IХ R_{h\Delta}[n]$, показанная на рис. 2.12, а по формуле (2.33) можно оценить энергетическую частотную характеристику фильтра $G_{\Delta}(f)$, представленную на рис. 2.13.

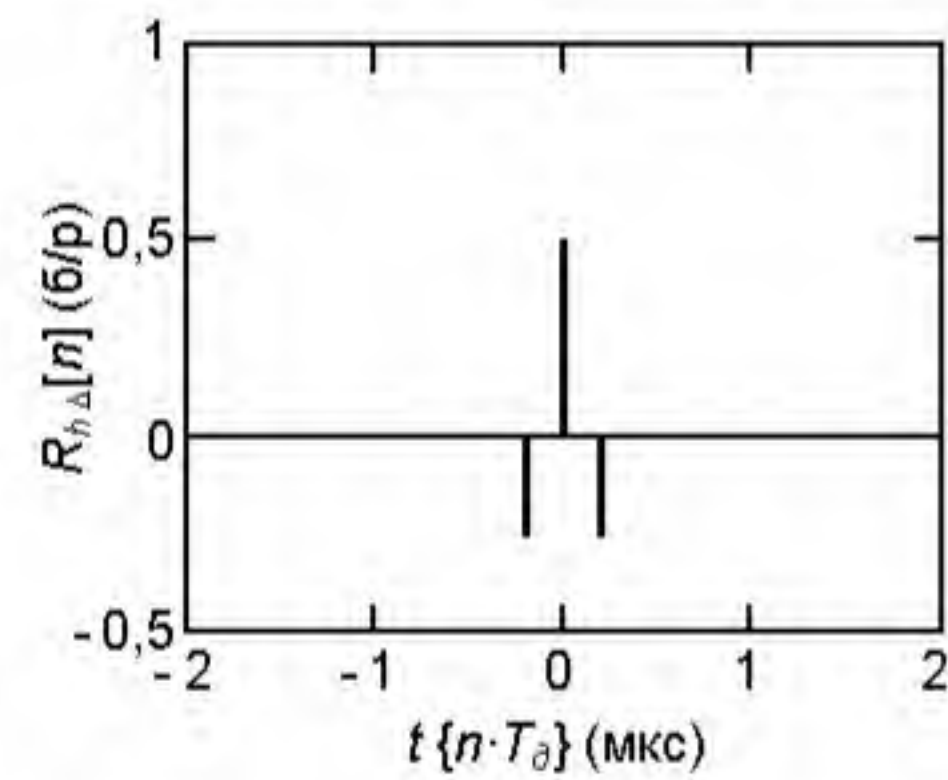


Рис. 2.12. Автокорреляционная функция ИХ цифрового ФВЧ.

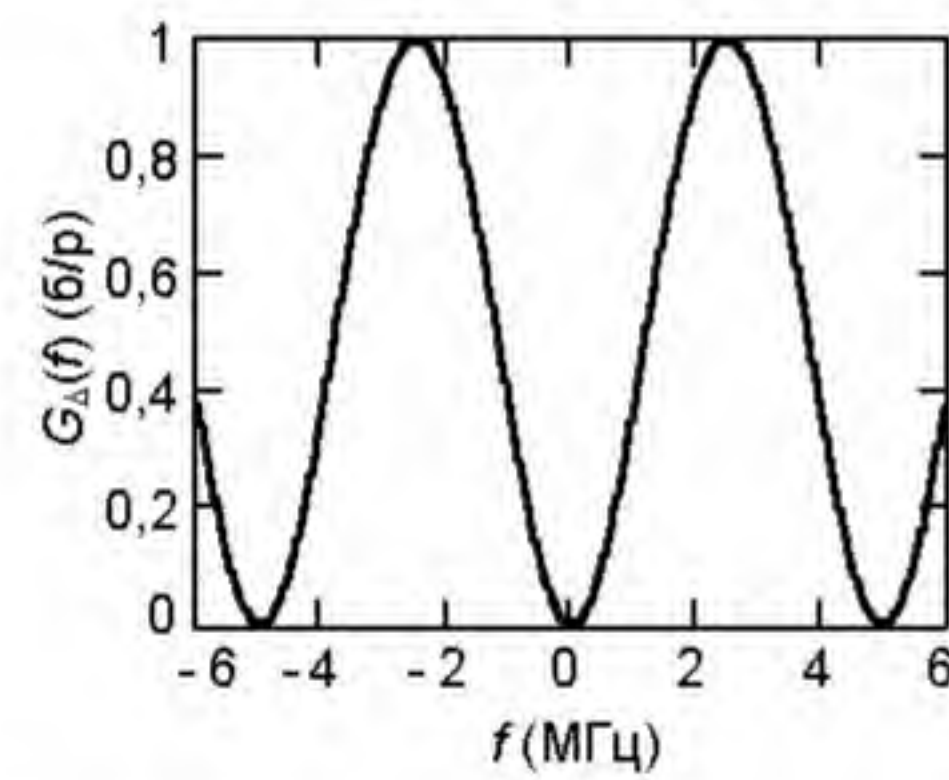


Рис. 2.13. Энергетическая частотная характеристика цифрового ФВЧ.

Подобно аналоговому сигналу дискретный импульсный сигнал на выходе цифрового фильтра может быть найден либо по известному сигналу на входе фильтра и импульсной характеристике фильтра (во временной области), либо по известному спектру сигнала на входе фильтра и комплексной частотной характеристике фильтра (в частотной области):

$$y_{\Delta}[n] = s_{\Delta}[n] * h_{\Delta}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s_{\Delta}[k] h_{\Delta}[n-k], \quad (\text{В} \cdot \text{с}),$$

$$\begin{array}{c} \text{ДВПФ} \\ \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \\ Y_{\Delta}(f) = S_{\Delta}(f) \cdot H_{\Delta}(f), \quad (\text{В} \cdot \text{с}), \end{array} \quad (2.37)$$

где «*» – операция линейной свертки.

Автокорреляционная функция дискретного импульсного сигнала на выходе цифрового фильтра может быть найдена несколькими способами:

– по известному сигналу на выходе фильтра:

$$R_{y_{\Delta}}[n] = y_{\Delta}[n] * y_{\Delta}[-n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_{\Delta}[k] y_{\Delta}[n+k], \quad (\text{В} \cdot \text{с})^2, \quad (2.38)$$

– по известной АКФ сигнала на входе фильтра и АКФ импульсной характеристики цифрового фильтра:

$$R_{y_{\Delta}}[n] = R_{s_{\Delta}}[n] * R_{h_{\Delta}}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{s_{\Delta}}[k] R_{h_{\Delta}}[n-k], \quad (\text{В} \cdot \text{с})^2. \quad (2.39)$$

Энергетический спектр сигнала на выходе фильтра также может быть найден несколькими способами:

– по известному спектру сигнала на выходе фильтра:

$$W_{y_{\Delta}}(f) = Y_{\Delta}(f) \cdot Y_{\Delta}^*(f) = |Y_{\Delta}(f)|^2, \quad (\text{В} \cdot \text{с})^2, \quad (2.40)$$

– по известному энергетическому спектру сигнала на входе фильтра и энергетической частотной характеристике цифрового фильтра:

$$W_{y_{\Delta}}(f) = W_{s_{\Delta}}(f) \cdot G_{\Delta}(f), \quad (\text{В} \cdot \text{с})^2. \quad (2.41)$$

Энергетический спектр и автокорреляционная функция дискретного импульсного сигнала на выходе цифрового фильтра связаны между собой дискретным во времени преобразованием Фурье:

$$\begin{array}{ll} \text{Прямое ДВПФ} & \text{Обратное ДВПФ} \\ W_{y_{\Delta}}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{y_{\Delta}}[n] e^{-j2\pi f n T_{\Delta}}, \quad (\text{В} \cdot \text{с})^2, & R_{y_{\Delta}}[n] = T_{\Delta} \cdot \int_0^{1/T_{\Delta}} W_{y_{\Delta}}(f) e^{j2\pi f n T_{\Delta}} df, \quad (\text{В} \cdot \text{с})^2. \end{array}$$

Аналогично аналоговым сигналам рассмотрим пример прохождения дискретного импульсного сигнала $s_{\Delta}[n]$ через цифровой фильтр высоких частот. Сигнал на выходе фильтра $y_{\Delta}[n]$ и спектр этого сигнала $Y_{\Delta}(f)$, найденные по формуле (2.37), показаны на рис. 2.14 и 2.15 соответственно.

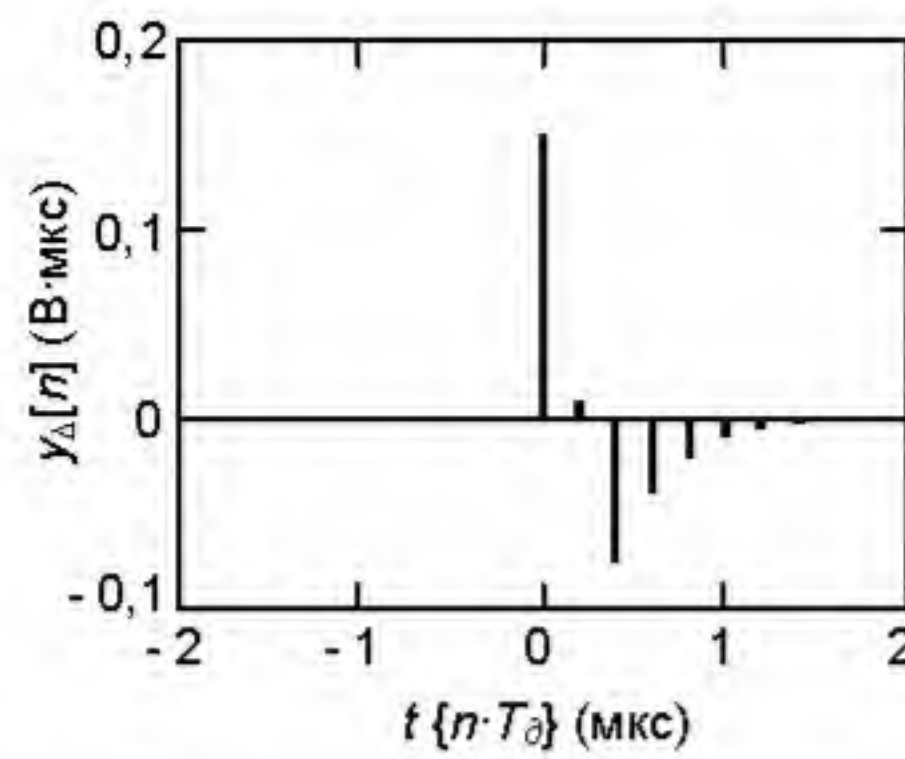


Рис. 2.14. Дискретный импульсный сигнал на выходе цифрового ФВЧ.

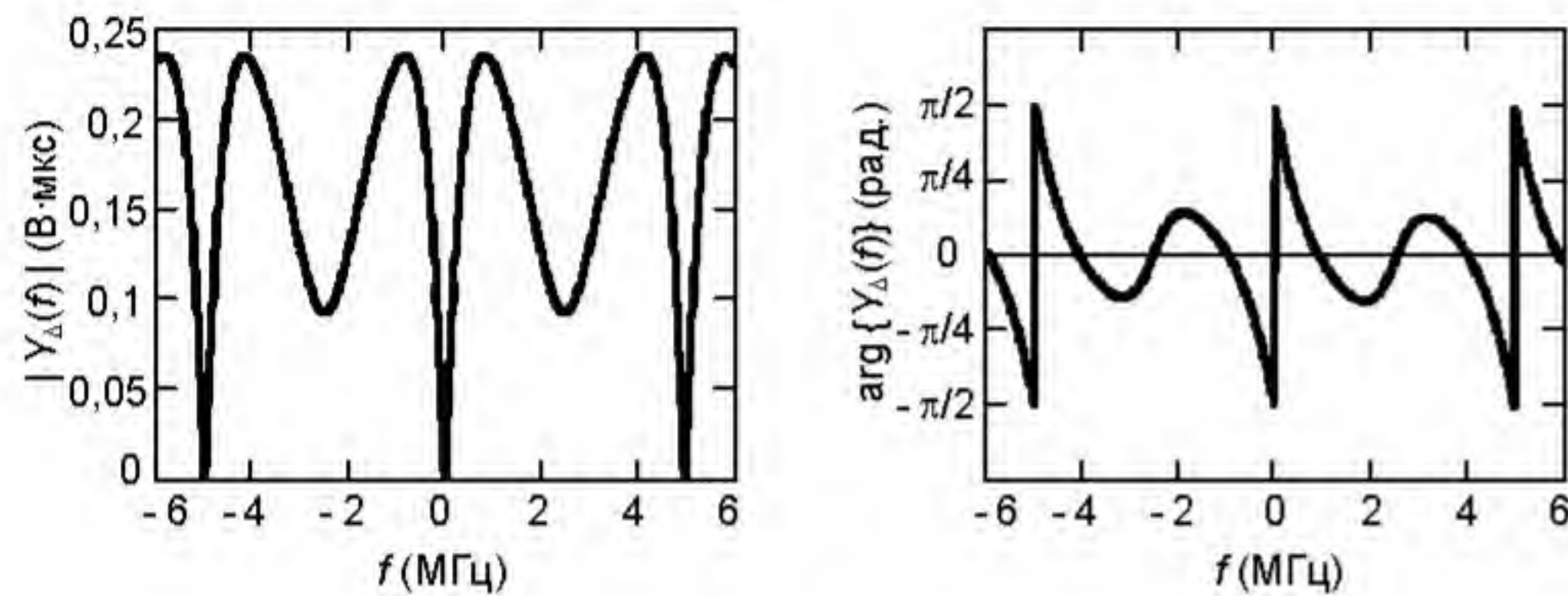


Рис. 2.15. Амплитудный и фазовый спектры сигнала $y_{\Delta}[n]$ на выходе цифрового ФВЧ.

Для нахождения автокорреляционной функции дискретного импульсного сигнала на выходе цифрового фильтра $R_{y_{\Delta}}[n]$ можно воспользоваться формулами (2.38) или (2.39). Энергетический спектр $W_{y_{\Delta}}(f)$ сигнала на выходе ФВЧ может быть оценен с помощью формул (2.40) или (2.41). Полученные АКФ и энергетический спектр сигнала на выходе фильтра представлены на рис. 2.16 и 2.27 соответственно.

Из сравнения рис. 1.22 и 2.16 видно, что АКФ дискретного импульсного сигнала на выходе цифрового фильтра $R_{y_{\Delta}}[n]$ совпадает со значениями АКФ аналогового импульсного сигнала на выходе ФВЧ первого порядка в моменты времени, кратные периоду дискретизации T_{δ} с точностью до весового коэффициента.

Из сравнения рис. 1.23 и 2.17 видно, что энергетический спектр дискретного импульсного сигнала на выходе цифрового фильтра $W_{y_{\Delta}}(f)$ является периодическим повторением энергетического спектра $W_y(f)$ на выходе аналогового фильтра с периодом повторения f_{δ} .

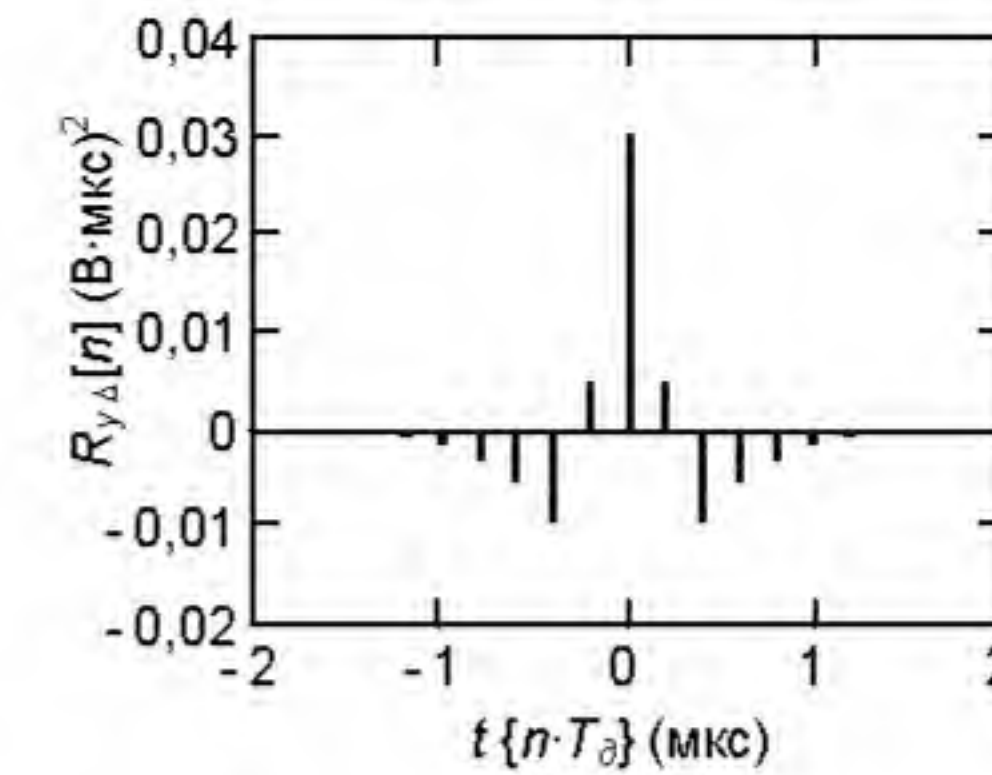


Рис. 2.16. Автокорреляционная функция сигнала $y_{\Delta}[n]$ на выходе ФВЧ.

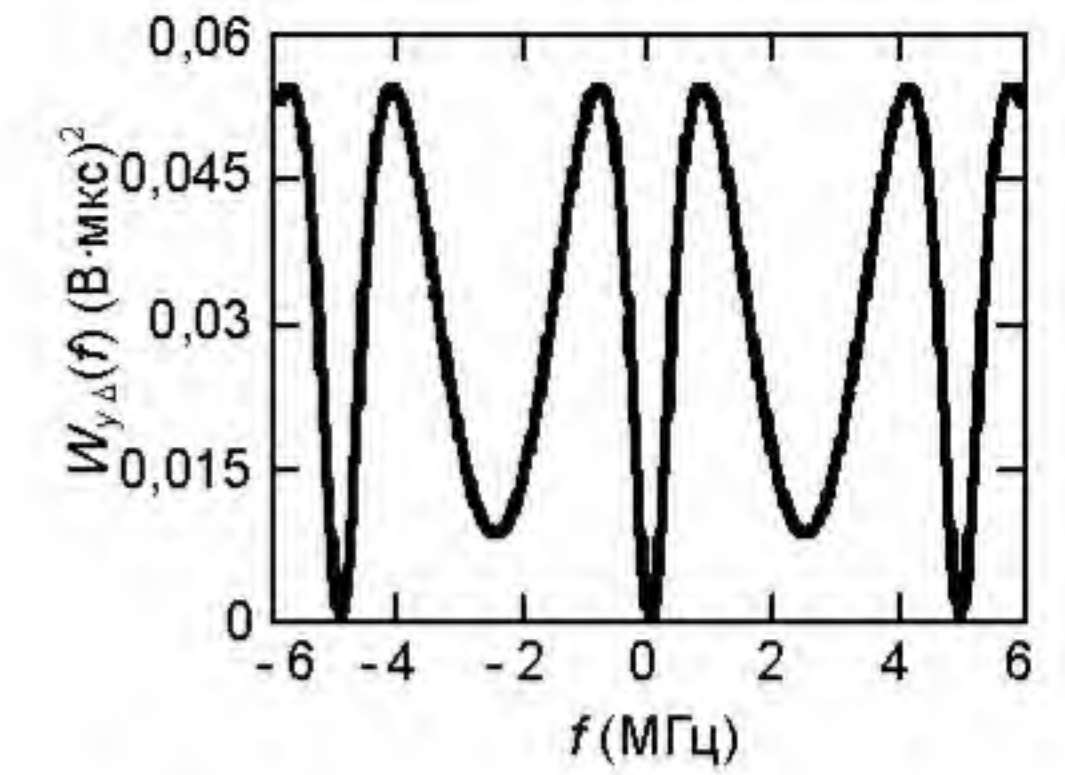


Рис. 2.17. Энергетический спектр сигнала $y_{\Delta}[n]$ на выходе ФВЧ.

Согласно теореме Парсеваля для дискретного импульсного сигнала и свойствам ДВПФ для АКФ сигнала:

$$R_{y_{\Delta}}[0] = T_{\delta} \int_{-f_{\delta}/2}^{f_{\delta}/2} W_{y_{\Delta}}(f) df \approx 0,03, (B \cdot mks)^2, \quad (2.42)$$

$$W_{y_{\Delta}}(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{y_{\Delta}}[n] = 0.$$

Для проверки правильности нахождения дискретного сигнала на выходе цифрового фильтра $y_{\Delta}[n]$ проведем его восстановление с помощью идеального ФНЧ, частотная характеристика которого определяется следующим образом:

$$H(f) = \begin{cases} 1, & |f| \leq f_{\delta}/2 \\ 0, & |f| > f_{\delta}/2 \end{cases} \quad (2.43)$$

где $f_{\delta} = 5$ МГц – частота дискретизации сигнала.

Восстановленный сигнал на выходе фильтра высоких частот $\hat{y}(t)$ и аналоговый импульсный сигнал на выходе ФВЧ первого порядка, полученный в разделе 2.1, показаны на рис. 2.18.

Из рис. 2.18 видно, что наибольшие искажения в восстановленном сигнале $\hat{y}(t)$ приходятся на момент скачка при $t = 0$. Это можно объяснить потерей части информации о спектре сигнала в связи с его дискретизацией.

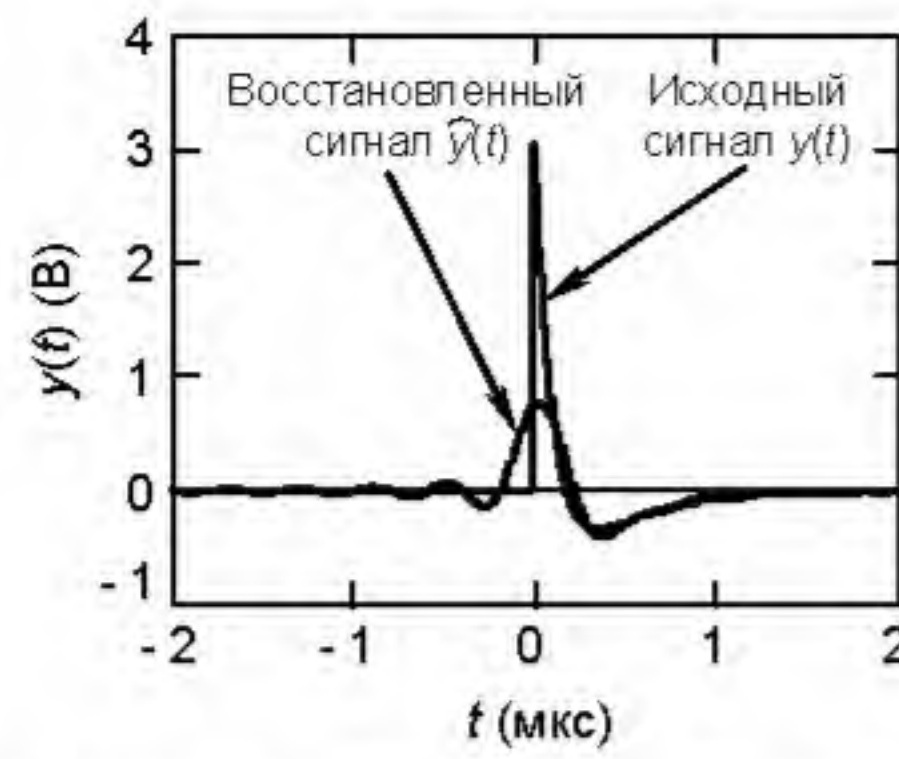


Рис. 2.18. Сравнение аналогового импульсного сигнала на выходе ФВЧ с сигналом, восстановленным из дискретного сигнала $u_{\Delta}[n]$ идеальным ФНЧ.

2.3.2. Дискретные периодические сигналы

Рассмотрим прохождение дискретного периодического сигнала $s_N[n]$ через линейную цепь (рис. 2.19).



Рис. 2.19. Прохождение дискретного периодического сигнала через линейную цепь.

Импульсная характеристика цифрового фильтра $h_N[n]$ является дискретной периодической функцией и может быть получена из $h_{\Delta}[n]$ следующим образом:

$$h_N[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{\Delta}[n - kN], \quad (6/p), \quad (2.44)$$

$$h_N(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_N[n] \delta(t - nT_{\delta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_{\Delta}(t - kT), \quad (\Gamma\Omega), \quad (2.45)$$

где $T = N \cdot T_{\delta}$ – период повторения анализируемого дискретного сигнала (N – целое число). Кроме того, импульсная характеристика цифрового фильтра $h_N[n]$ может быть получена из периодической ИХ аналогового фильтра-прототипа $h_T(t)$ путём ее дискретизации последовательностью δ -функций, отстоящих друг от друга на интервал дискретизации T_{δ} , и имеющих вес, равный T_{δ} :

$$h_N[n] = T_{\delta} \cdot h_T(nT_{\delta}), \quad (6/p). \quad (2.46)$$

Частотная характеристика цифрового фильтра $H_N[m]$ может быть получена по известной непрерывной частотной характеристике цифрового фильтра $H_{\Delta}(f)$:

$$H_N[m] = \frac{1}{NT_{\delta}} \cdot H_{\Delta}\left(\frac{m}{NT_{\delta}}\right), \quad (\Gamma\Omega), \quad (2.47)$$

$$H_N(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H_N[m] \cdot \delta\left(f - \frac{m}{N \cdot T_{\delta}}\right), \quad (6/p), \quad (2.48)$$

или путем периодического повторения периодической частотной характеристики аналогового фильтра-прототипа

$$H_N[m] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_T[m - kN], \quad (\Gamma\Omega). \quad (2.49)$$

Импульсная и частотная характеристики цифрового фильтра связаны друг с другом дискретным преобразованием Фурье:

$$\begin{array}{ll} \text{Прямое ДПФ} & \text{Обратное ДПФ} \\ H_N[m] = \frac{1}{NT_{\delta}} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} h_N[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nm}, \quad (\Gamma\Omega), & h_N[n] = T_{\delta} \cdot \sum_{m=0}^{N-1} H_N[m] e^{j\frac{2\pi}{N}nm}, \quad (6/p). \end{array}$$

Автокорреляционная функция дискретной периодической импульсной характеристики цифрового фильтра $h_N[n]$ определяется следующим образом:

$$R_{h_N}[n] = NT_{\delta} \cdot h_N[n] \otimes h_N[-n] = \sum_{k=0}^{N-1} h_N[k] h_N[n+k], \quad (6/p), \quad (2.50)$$

$$R_{h_N}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{h_N}[n] \delta(t - nT_{\delta}), \quad (\Gamma\Omega), \quad (2.51)$$

где « \otimes » – операция дискретной круговой свертки.

АКФ периодической ИХ цифрового фильтра может быть найдена по известной периодической АКФ исходного аналогового фильтра:

$$R_{h_N}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{h_T}(t - kT) = R_{h_T}(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT), \quad (\Gamma\Omega), \quad (2.52)$$

где « $*$ » – операция линейной свертки.

Дискретная частотная характеристика по мощности цифрового фильтра определяется соотношением:

$$K_N[m] = \frac{1}{NT_\delta} \cdot K_\Delta\left(\frac{m}{NT_\delta}\right) = NT_\delta \cdot H_N[m] \cdot H_N^*[m] = NT_\delta \cdot |H_N[m]|^2, \quad (\Gamma\text{ц}), \quad (2.53)$$

$$K_N(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} K_N[m] \cdot \delta\left(f - \frac{m}{N \cdot T_\delta}\right), \quad (\delta/\text{p}), \quad (2.54)$$

где « $*$ » – комплексное сопряжение.

Частотная характеристика по мощности и автокорреляционная функция периодической импульсной характеристики цифрового фильтра связаны между собой дискретным преобразованием Фурье:

$$\begin{array}{ll} \text{Прямое ДПФ} & \text{Обратное ДПФ} \\ K_N[m] = \frac{1}{NT_\delta} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} R_{hN}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nm}, & (\Gamma\text{ц}), \\ R_{hN}[n] = T_\delta \cdot \sum_{m=0}^{N-1} K_N[m] e^{j\frac{2\pi}{N}nm}, & (\delta/\text{p}). \end{array}$$

Рассмотрим пример нахождения временных и частотных характеристик цифрового фильтра для дискретных периодических сигналов на основе фильтра, описанного в разделе 2.2.

Периодическая импульсная характеристика цифрового фильтра $h_N[n]$, полученная из ИХ $h_\Delta[n]$ (рис. 2.10 б) по формуле (2.44), показана на рис. 2.20.

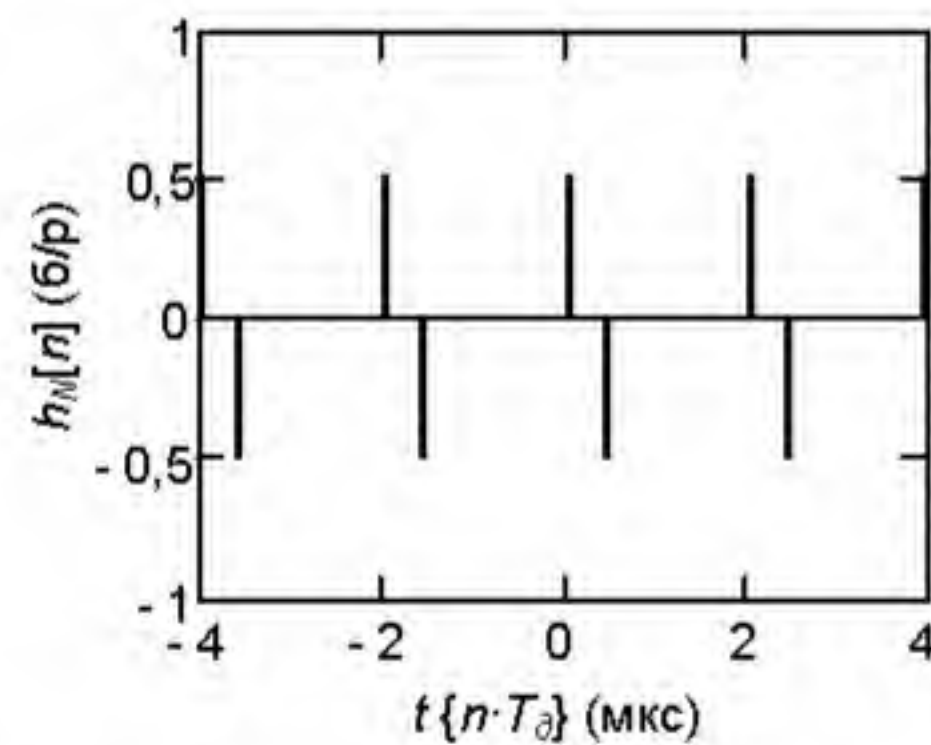


Рис. 2.20. Периодическая импульсная характеристика цифрового ФВЧ.

Дискретная периодическая частотная характеристика цифрового фильтра $H_N[m]$, найденная по известной непрерывной частотной характеристике цифрового фильтра $H_\Delta(f)$ по формуле (2.47), показана на рис. 2.21.

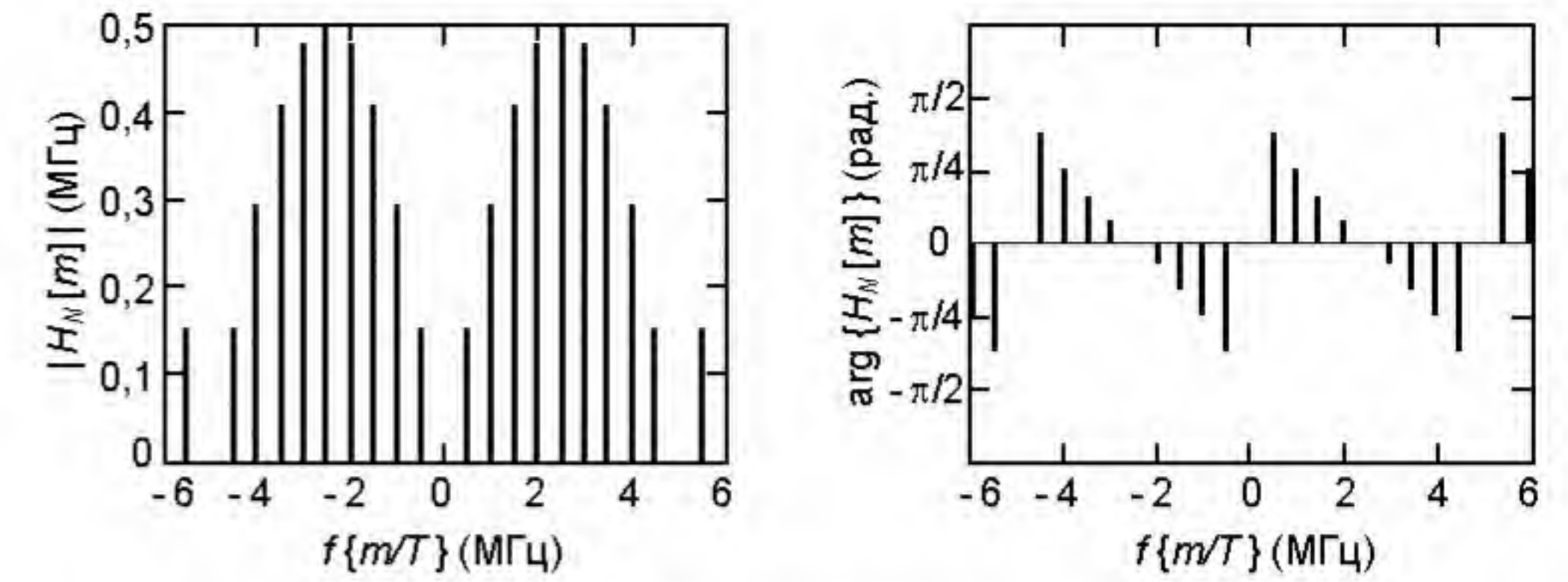


Рис. 2.21. Амплитудная и фазовая характеристики цифрового ФВЧ.

По известной периодической импульсной характеристике $h_N[n]$ цифрового фильтра с помощью формулы (2.50) может быть определена автокорреляционная функция ИХ $R_{hN}[n]$, показанная на рис. 2.22. По формуле (2.53) можно оценить дискретную периодическую частотную характеристику по мощности цифрового фильтра $K_N[m]$, представленную на рис. 2.23.

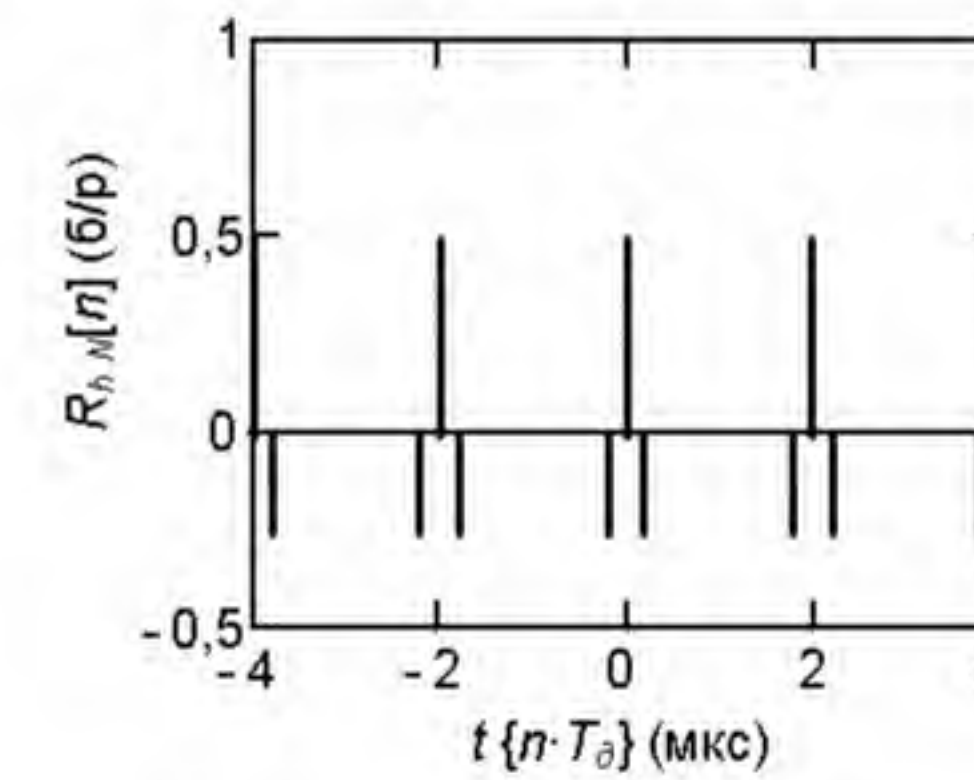


Рис. 2.22. Автокорреляционная функция периодической ИХ цифрового ФВЧ.

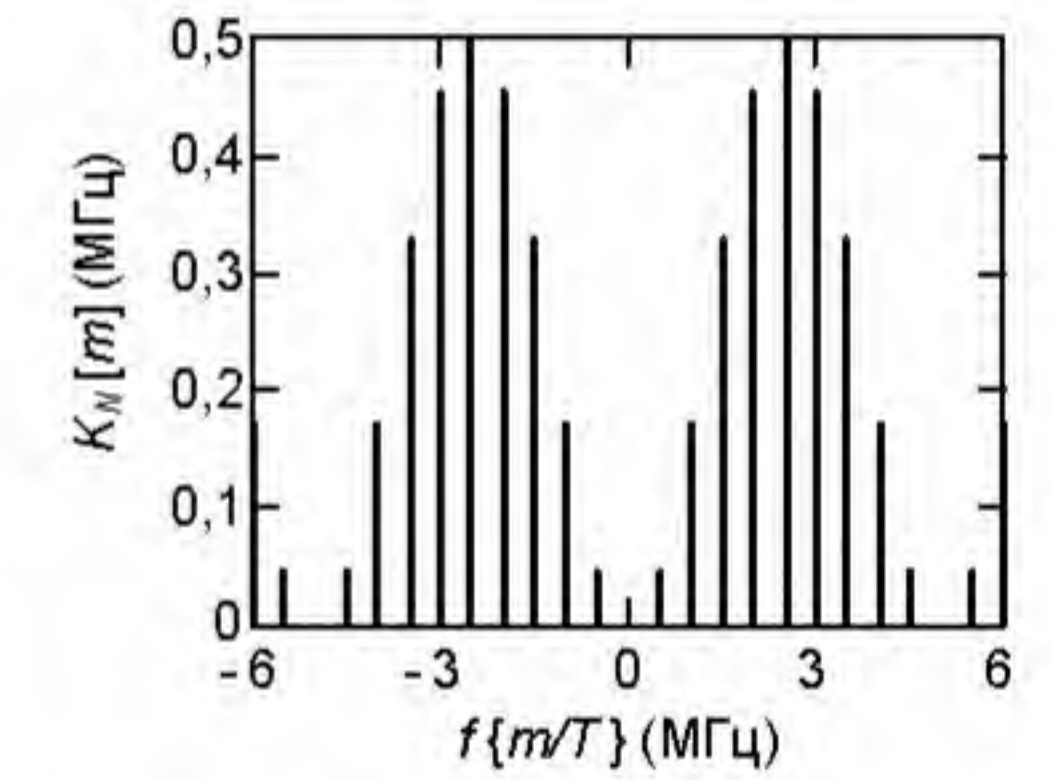


Рис. 2.23. Частотная характеристика цифрового ФВЧ по мощности.

Дискретный периодический сигнал на выходе фильтра может быть найден путём линейной свёртки импульсной характеристикой цифрового фильтра $h_\Delta[n]$ с сигналом на входе линейной цепи:

$$y_N[n] = s_N[n] * h_\Delta[n] = s_\Delta[n] * h_N[n], \quad (\text{В} \cdot \text{с}) \quad (2.55)$$

или с помощью круговой свёртки периодической импульсной характеристики фильтра $h_N[n]$ с входным сигналом:

$$\begin{array}{c}
y_N[n] = N T_\delta \cdot s_N[n] \otimes h_N[n] = \sum_{k=0}^{N-1} s_N[k] \cdot h_N[n-k], (B \cdot c), \\
\text{ДПФ} \quad \updownarrow \quad \quad \updownarrow \quad \quad \updownarrow \\
Y_N[m] = N T_\delta \cdot S_N[m] \cdot H_N[m], (B).
\end{array} \quad (2.56)$$

Спектр периодического сигнала на выходе цифрового фильтра может быть найден следующим образом:

$$Y_N(f) = S_N(f) \cdot H_N(f), (B \cdot c). \quad (2.57)$$

Автокорреляционная функция дискретного периодического сигнала на выходе цифрового фильтра может быть найдена несколькими способами:

– по известному сигналу на выходе фильтра:

$$R_{y_N}[n] = y_N[n] \otimes y_N[-n] = \frac{1}{N T_\delta} \sum_{k=0}^{N-1} y_N[k] y_N[n+k], (B^2 \cdot c); \quad (2.58)$$

$$R_{y_N}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{y_N}[n] \delta(t - n T_\delta), (B^2), \quad (2.59)$$

– по известной АКФ сигнала на входе фильтра и АКФ импульсной характеристики цифрового фильтра:

$$R_{y_N}[n] = N T_\delta \cdot R_{s_N}[n] \otimes R_{h_N}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_{s_N}[k] R_{h_N}[n-k], (B^2 \cdot c). \quad (2.60)$$

Спектр мощности периодического сигнала на выходе фильтра также может быть найден несколькими способами:

– по известному спектру сигнала на выходе фильтра:

$$P_{y_N}[m] = Y_N[m] \cdot Y_N^*[m] = |Y_N[m]|^2, (B^2); \quad (2.61)$$

$$P_{y_N}(f) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} P_{y_N}[m] \cdot \delta\left(f - \frac{m}{N \cdot T_\delta}\right), (B^2 \cdot c); \quad (2.62)$$

– по известному спектру мощности сигнала на входе фильтра и частотной характеристике аналогового фильтра по мощности:

$$P_{y_N}[m] = N T_\delta \cdot P_{s_N}[m] \cdot K_N[m], (B^2). \quad (2.63)$$

Спектр мощности и автокорреляционная функция дискретного периодического сигнала на выходе фильтра связаны между собой дискретным преобразованием Фурье:

$$\begin{array}{cc}
\text{Прямое ДПФ} & \text{Обратное ДПФ} \\
P_{y_N}[m] = \frac{1}{N T_\delta} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} R_{y_N}[n] e^{-j \frac{2\pi}{N} n m}, (B^2), & R_{y_N}[n] = T_\delta \cdot \sum_{m=0}^{N-1} P_{y_N}[m] e^{j \frac{2\pi}{N} n m}, (B^2).
\end{array}$$

В заключение рассмотрим пример прохождения дискретного периодического сигнала $s_N[n]$ через цифровой фильтр высоких частот. Сигнал на выходе фильтра $y_N[n]$ и спектр этого сигнала $Y_N[m]$, найденные по формуле (2.56), показаны на рис. 2.24 и 2.25 соответственно.

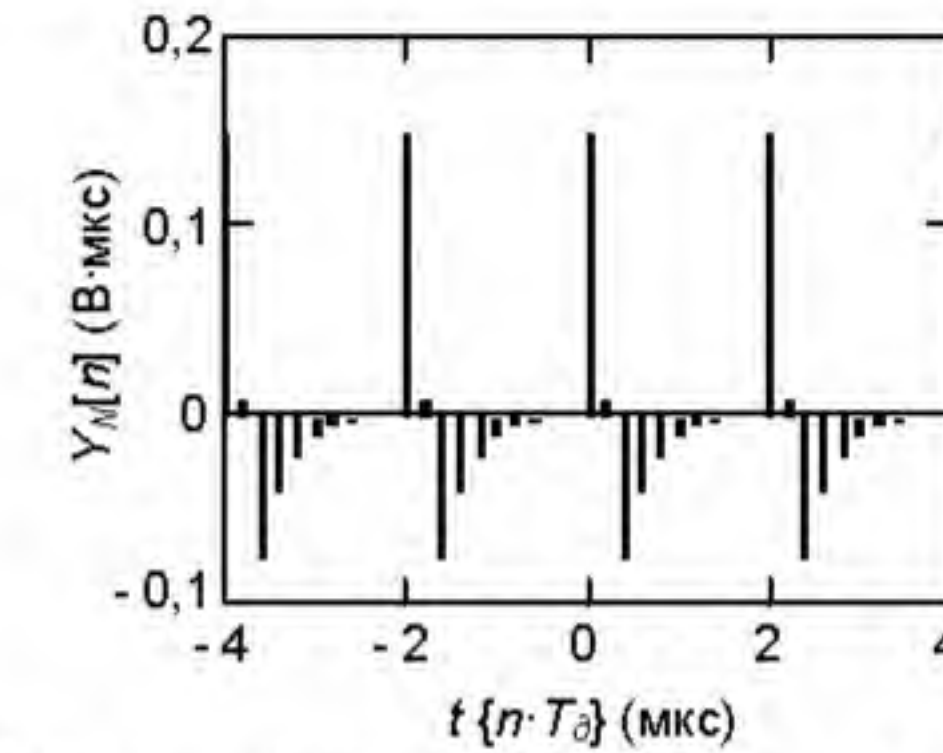


Рис. 2.24. Дискретный периодический сигнал на выходе ФВЧ.

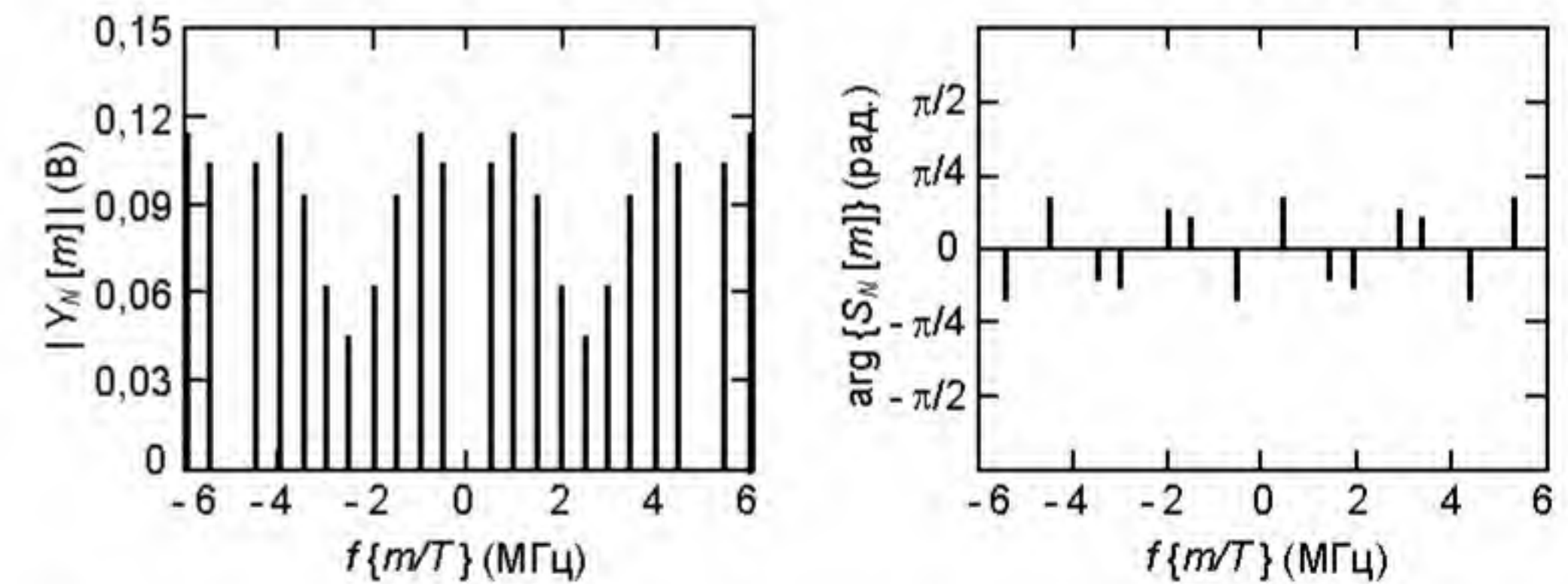


Рис. 2.25. Амплитудный и фазовый спектры сигнала $y_N[n]$ на выходе ФВЧ.

Для нахождения автокорреляционной функции дискретного периодического сигнала на выходе цифрового фильтра $R_{y_N}[n]$ можно воспользоваться формулами (2.58) или (2.60). Энергетический спектр $W_{y_N}[m]$ сигнала на выходе ФВЧ может быть оценен с помощью формул (2.61) или (2.63). Полученные АКФ и энергетический спектр сигнала на выходе цифрового фильтра представлены на рис. 2.26 и 2.27 соответственно.

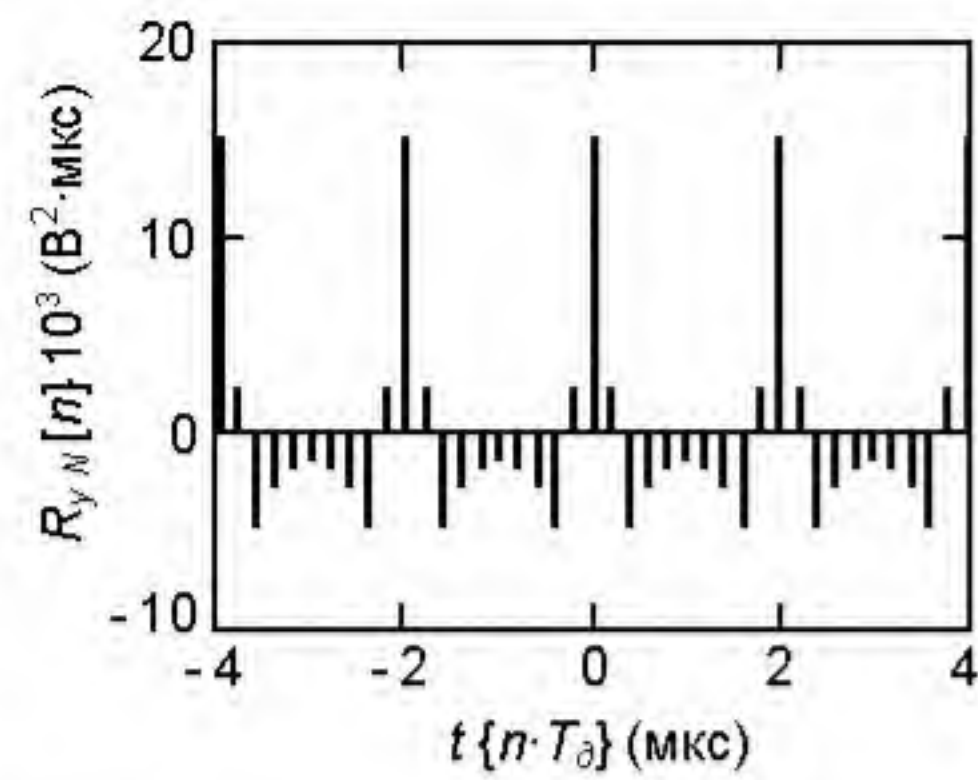


Рис. 2.26. Автокорреляционная функция сигнала $y_N[n]$ на выходе ФВЧ.

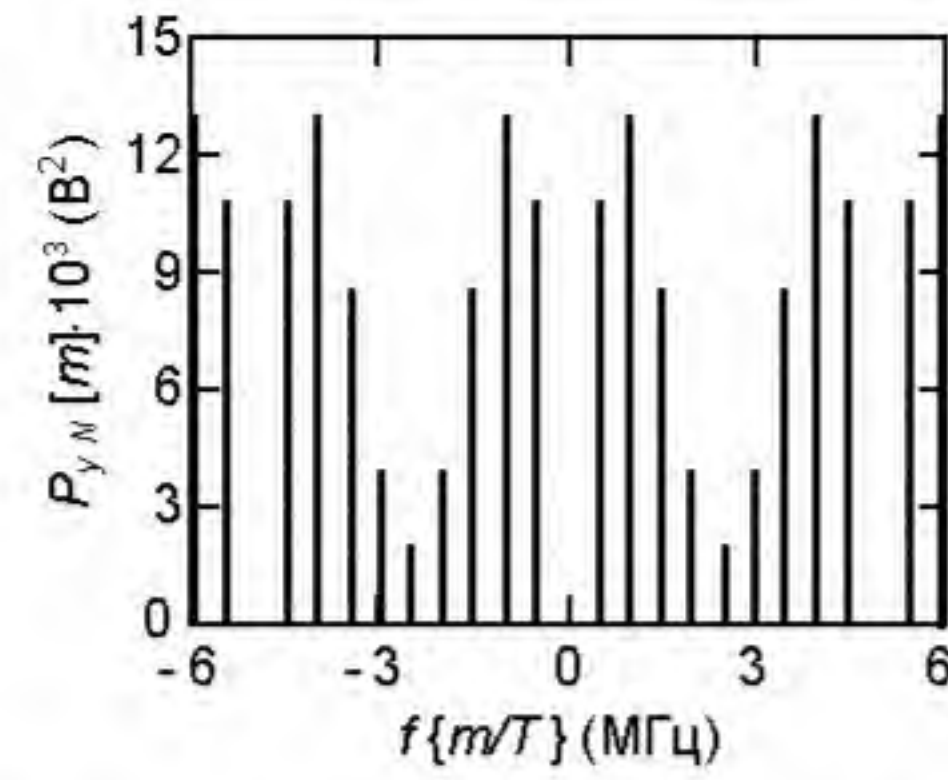


Рис. 2.27. Энергетический спектр сигнала $y_N[n]$ на выходе ФВЧ.

Согласно теореме Парсеваля для дискретного периодического сигнала:

$$\begin{aligned} R_{y_N}[0] &= T_0 \cdot \sum_{m=0}^{N-1} P_{y_N}[m] \approx 15 \cdot 10^{-3}, (\text{B}^2 \cdot \text{мкс}), \\ P_{y_N}[0] &= \frac{1}{NT_0} \cdot \sum_{n=0}^{N-1} R_N[n] = 0. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Аналогично дискретному импульсному сигналу, произведём восстановление периодического сигнала на выходе фильтра высоких частот $\hat{y}_T(t)$. Сравнение восстановленного сигнала с аналоговым периодическим сигналом на выходе ФВЧ первого порядка, полученным в разделе 2.2, показано на рис. 2.28.

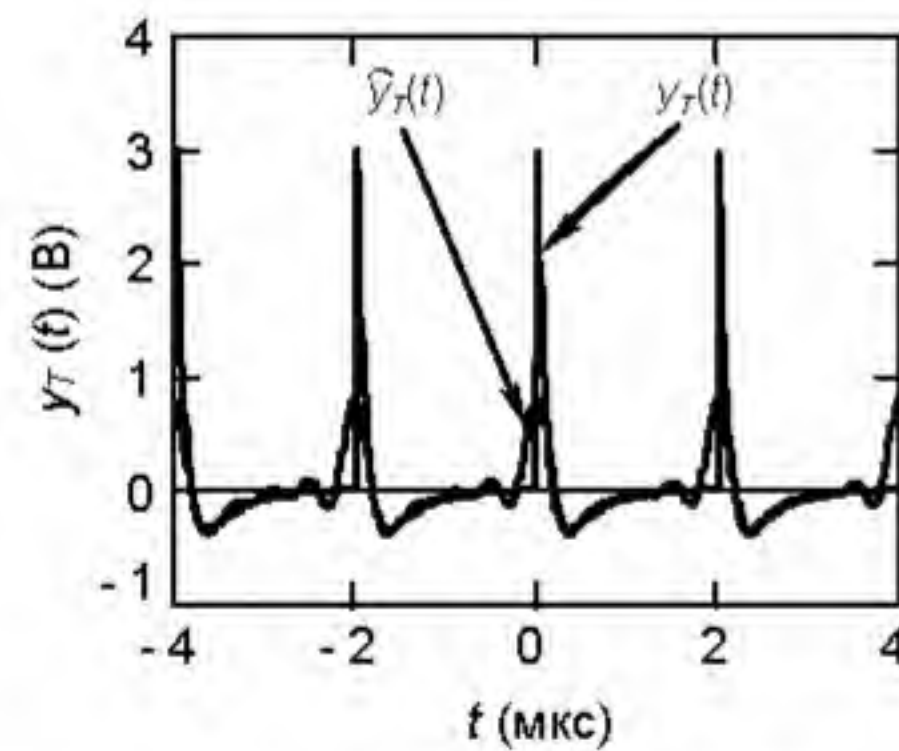


Рис. 2.28. Сравнение аналогового периодического сигнала на выходе ФВЧ с сигналом, восстановленным из дискретного сигнала $y_N[n]$ идеальным ФНЧ.

Из рис. 2.28 видно, восстановленный периодический сигнал в пределах одного периода практически полностью повторяет по форме восстановленный импульсный сигнал $\hat{y}(t)$, что подтверждает правильность полученных результатов.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Импульсные и периодические аналоговые сигналы

$s(t)$	– аналоговый импульсный сигнал, (В);
$S(f)$	– спектр (спектральная плотность) аналогового импульсного сигнала, (В·с);
$R_s(t)$	– автокорреляционная функция (АКФ) аналогового импульсного сигнала, (В ² ·с);
$W_s(f)$	– энергетический спектр аналогового импульсного сигнала, (В ² ·с ²);
$s_T(t)$	– аналоговый периодический сигнал, (В);
$S_T(f)$	– спектр (спектральная плотность) аналогового периодического сигнала, (В·с);
$S_T[m]$	– отсчёты спектра аналогового периодического сигнала, (В);
$R_{s_T}(t)$	– АКФ аналогового периодического сигнала, (В ²);
$P_{s_T}(f)$	– спектральная плотность мощности аналогового периодического сигнала, (В ² ·с);
$P_{s_T}[m]$	– отсчёты спектра мощности аналогового периодического сигнала, (В ²);

Характеристики аналогового фильтра

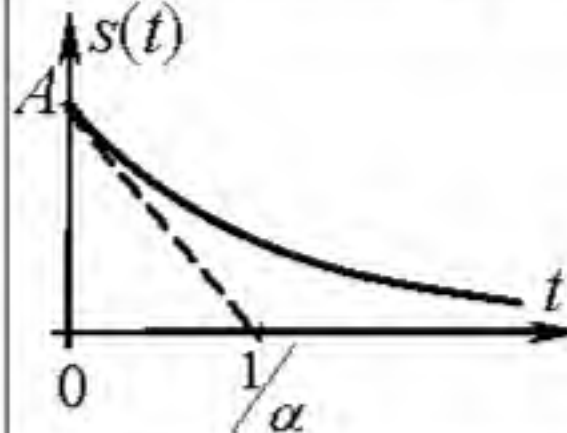
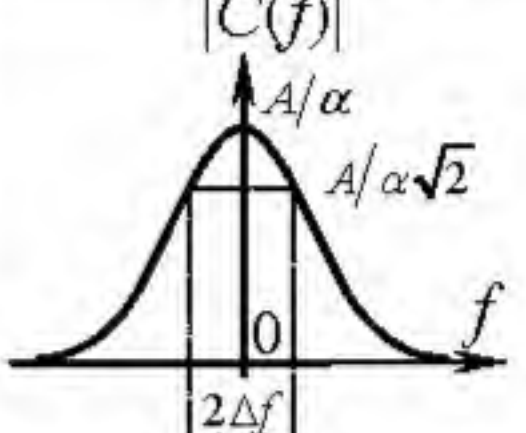
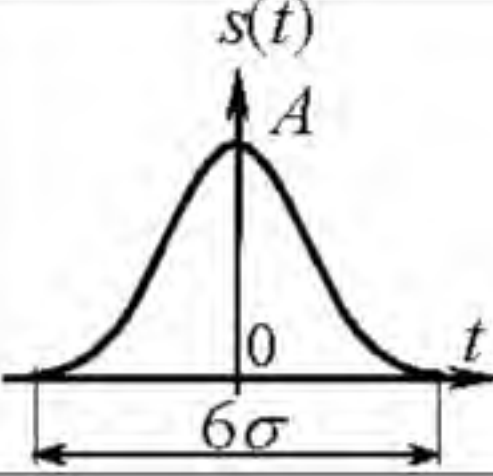
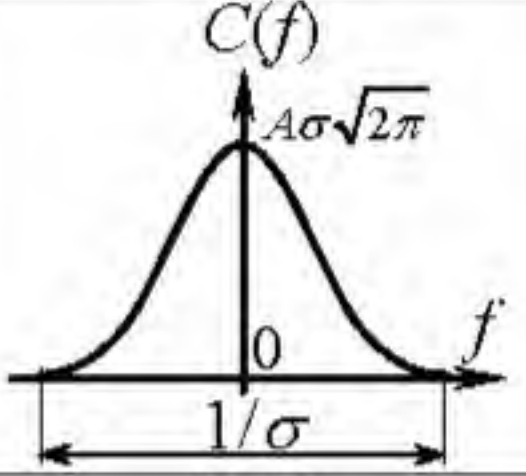
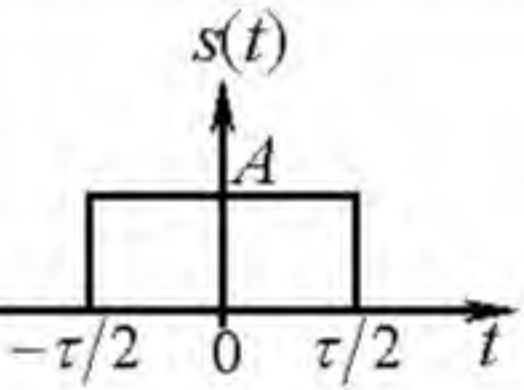
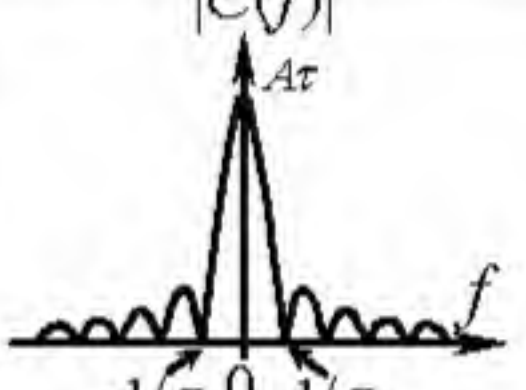
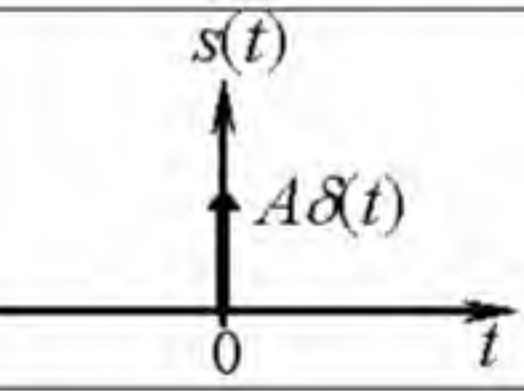
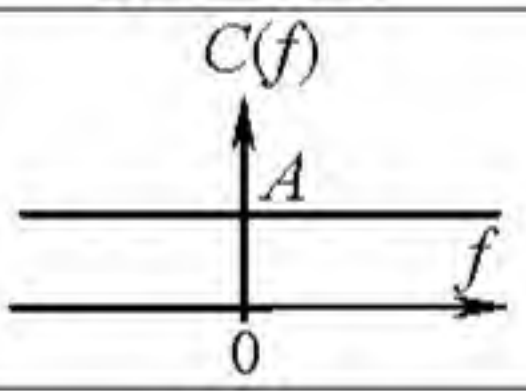
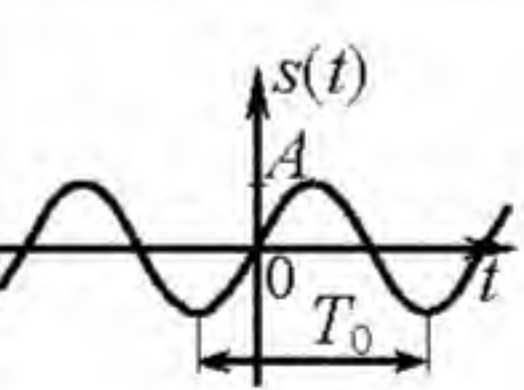
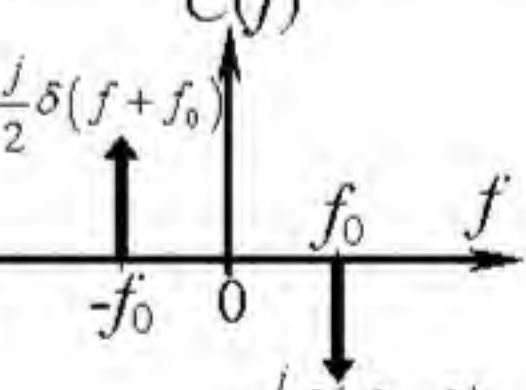
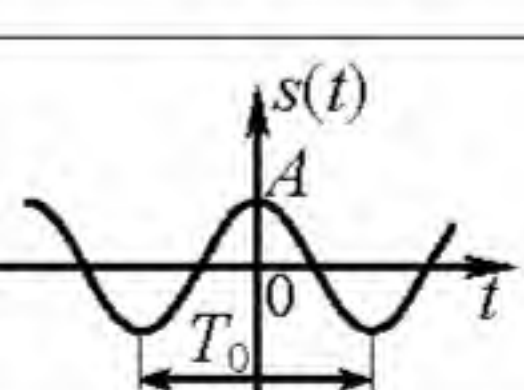
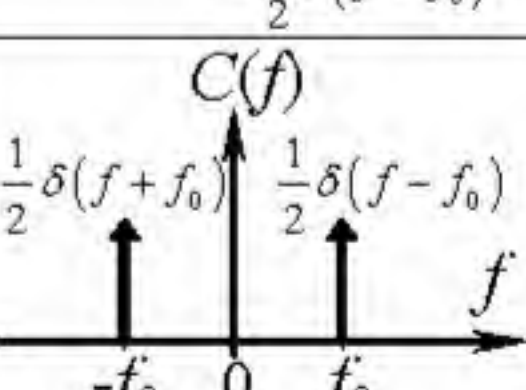
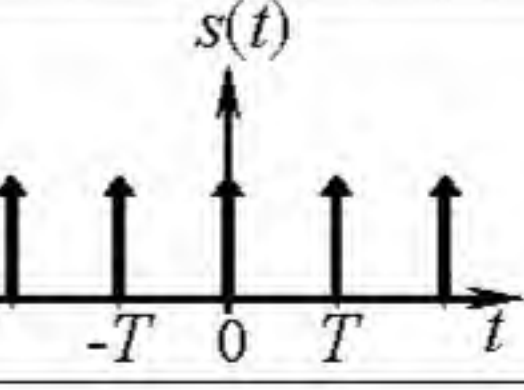
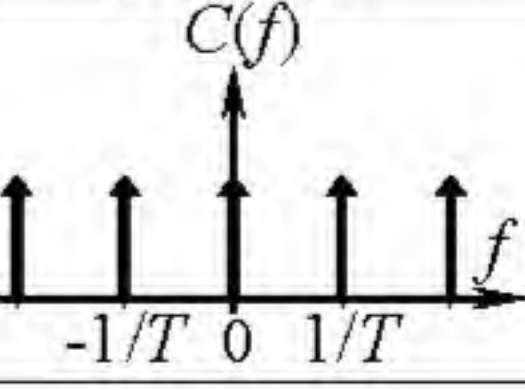
$h(t)$	– импульсная характеристика (ИХ) аналогового фильтра, (Гц);
$H(f)$	– частотная характеристика (ЧХ) аналогового фильтра, (б/р);
$R_h(t)$	– АКФ импульсной характеристики аналогового фильтра, (Гц);
$G(f)$	– энергетическая ЧХ аналогового фильтра, (б/р);
$h_T(t)$	– периодическая импульсная характеристика аналогового фильтра, (Гц);
$H_T(f)$	– дискретная частотная характеристика аналогового фильтра, (б/р);
$H_T[m]$	– отсчёты дискретной частотной характеристики аналогового фильтра, (Гц);
$R_{h_T}(t)$	– АКФ периодической импульсной характеристики аналогового фильтра, (Гц);
$K_T(f)$	– дискретная ЧХ аналогового фильтра по мощности, (б/р);
$K_T[m]$	– отсчёты дискретной ЧХ аналогового фильтра по мощности, (Гц);

$s_{\Delta}(t)$	– дискретный импульсный сигнал, (В);
$s_{\Delta}[n]$	– отсчёты дискретного импульсного сигнала, (В·с);
$S_{\Delta}(f)$	– спектр (спектральная плотность) дискретного импульсного сигнала, (В·с);
$R_{S_{\Delta}}(t)$	– АКФ дискретного импульсного сигнала, (В ² ·с);
$R_{S_{\Delta}}[n]$	– отсчёты АКФ дискретного импульсного сигнала, (В ² ·с ²);
$W_{S_{\Delta}}(f)$	– энергетический спектр дискретного импульсного сигнала, (В ² ·с ²);
$s_N(t)$	– дискретный периодический сигнал, (В);
$s_N[n]$	– отсчёты дискретного периодического сигнала, (В·с);
$S_N(f)$	– спектр (спектральная плотность) дискретного периодического сигнала, (В·с);
$S_N[m]$	– отсчёты спектра дискретного периодического сигнала, (В);
$R_{S_N}(t)$	– АКФ дискретного периодического сигнала, (В ²);
$R_{S_N}[n]$	– отсчёты АКФ дискретного периодического сигнала, (В ² ·с);
$P_{S_N}(f)$	– спектр мощности дискретного периодического сигнала, (В ² ·с);
$P_{S_N}[m]$	– отсчёты спектра мощности дискретного периодического сигнала, (В ²);

Характеристики цифрового фильтра

$h_{\Delta}(t)$	– импульсная характеристика цифрового фильтра, (Гц);
$h_{\Delta}[n]$	– отсчёты импульсной характеристики цифрового фильтра, (б/р);
$H_{\Delta}(f)$	– частотная характеристика цифрового фильтра, (б/р);
$R_{h_{\Delta}}(t)$	– АКФ импульсной характеристики цифрового фильтра, (Гц);
$R_{h_{\Delta}}[n]$	– отсчёты АКФ импульсной характеристики цифрового фильтра, (б/р);
$G_{\Delta}(f)$	– энергетическая ЧХ цифрового фильтра, (б/р);
$h_N(t)$	– периодическая импульсная характеристика цифрового фильтра, (Гц);
$h_N[n]$	– отсчёты периодической ИХ цифрового фильтра, (б/р);
$H_N(f)$	– периодическая частотная характеристика цифрового фильтра, (б/р);
$H_N[m]$	– отсчёты периодической ЧХ цифрового фильтра, (Гц);
$R_{h_N}(t)$	– АКФ периодической ИХ цифрового фильтра, (Гц);
$R_{h_N}[n]$	– отсчёты АКФ периодической ИХ цифрового фильтра, (б/р);
$K_N(f)$	– ЧХ цифрового фильтра по мощности, (б/р);
$K_N[m]$	– отсчёты ЧХ цифрового фильтра по мощности, (Гц).

ТАБЛИЦА СПЕКТРОВ СИГНАЛОВ

Сигнал $s(t)$	Спектр сигнала $C(f)$
 $Ae^{-\alpha t} \cdot u(t)$	 $\frac{A}{\alpha + j2\pi f}$
 $Ae^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	 $A\sigma\sqrt{2\pi} \cdot e^{-\frac{(2\pi f\sigma)^2}{2}}$
 $\begin{cases} A, & -\tau/2 \leq t \leq \tau/2 \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$	 $A\tau \cdot \frac{\sin(\pi f\tau)}{\pi f\tau}$
 $A \cdot \delta(t)$	 A
 $A \sin 2\pi f_0 t$	 $\frac{j}{2} \{ \delta(f + f_0) - \delta(f - f_0) \}$
 $A \cos 2\pi f_0 t$	 $\frac{1}{2} \{ \delta(f + f_0) + \delta(f - f_0) \}$
 $A \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$	 $\frac{A}{T} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$

СВОЙСТВА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Операция	$s(t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(f) e^{j2\pi f t} df$	$C(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j2\pi f t} dt$
1. Сопряженная симметрия	$\text{Im}[s(t)] = 0$, т.е. $x(t)$ действительна	$C(f) = C^*(-f)$, т.е. $\text{Re}[C(f)] = \text{Re}[C(-f)]$, $\text{Im}[C(f)] = -\text{Im}[C(-f)]$
2. Инвертирование по t	$s(-t)$	$C^*(f)$
3. Четная симметрия	$s(t) = s(-t)$	$C(f) = C(-f)$
4. Нечетная симметрия	$s(t) = -s(-t)$	$C(f) = -C(-f)$
5. Линейность	$a s_1(t) + b s_2(t)$	$a C_1(f) + b C_2(f)$
6. Дуальность f и t	$C(t)$	$s(-t)$
7. Временная задержка	$s(t - t_0)$	$e^{-j2\pi f t_0} C(f)$
8. Умножение на $e^{j2\pi f_0 t}$	$e^{j2\pi f_0 t} s(t)$	$C(f - f_0)$
9. Модуляция	$\begin{cases} s(t) \cdot \cos 2\pi f_0 t \\ s(t) \cdot \sin 2\pi f_0 t \end{cases}$	$\begin{cases} \frac{1}{2}[C(f + f_0) + C(f - f_0)] \\ \frac{j}{2}[C(f + f_0) - C(f - f_0)] \end{cases}$
10. Масштабирование	$s(at)$	$\frac{1}{ a } C\left(\frac{f}{a}\right)$
11. Дифференцирование	$\frac{d^n}{dt^n} s(t)$	$(j2\pi f)^n C(f)$
12. Интегрирование	$\int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau$	$\frac{C(f)}{j2\pi f} + \frac{s(0)}{2} \delta(f)$
13. Умножение на t	$t \cdot s(t)$	$-\frac{1}{j2\pi} \frac{dC(f)}{df}$
14. Свёртка	$x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) y(t - \tau) d\tau$	$X(f) \cdot Y(f)$
15. Произведение	$x(t) \cdot y(t)$	$X(f) * Y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\lambda) Y(f - \lambda) d\lambda$
16. Теорема Парсеваля	$E = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) ^2 dt$	$E = \int_{-\infty}^{\infty} C(f) ^2 df$
17. Свойство площади	$s(0) = \int_{-\infty}^{\infty} C(f) df$	$C(0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) dt$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И.С. Гоноровский. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Радио и связь, 1986 г.
2. Попов В.П. Основы теории цепей. – М.: Высшая школа, 1985.
3. Баскаков С.И. Радиотехнические цепи и сигналы. – М.: Высшая школа, 1998.
4. Сиберт У.М. Цепи, сигналы, системы. В двух частях. – М.: Мир, 1988.
5. Кузнецов Ю.В., Тронин Ю.В. Основы анализа линейных радиоэлектронных цепей (временной анализ). Учебное пособие. – М.: МАИ, 1992.
6. Кузнецов Ю.В., Тронин Ю.В. Основы анализа линейных радиоэлектронных цепей (частотный анализ). Учебное пособие. – М.: МАИ, 1992.
7. Кузнецов Ю.В., Тронин Ю.В. Линейные радиоэлектронные цепи и сигналы. Упражнения и задачи. Учебное пособие. – М.: МАИ, 1994.
8. Кузнецов Ю.В., Голованов В.В. Временной и частотный анализ линейных цепей. Учебное пособие. – М.: МАИ, 1999.
9. Латышев В.В. Ручьев М.К., Селин В.Я., Сотсков Б.М. Спектральный анализ сигналов. Учебное пособие. – М.: МАИ, 1988.
10. Латышев В.В. Ручьев М.К., Селин В.Я., Сотсков Б.М., Методы анализа прохождения сигналов через радиотехнические устройства. Учебное пособие. – М.: МАИ, 1991.
11. Латышев В.В., Ручьев М.К., Селин В.Я., Сотсков Б.М., Преобразование сигналов в нелинейных цепях. Учебное пособие. – М.: МАИ, 1994.
12. Голованов В.В., Яковлев А.О., Проектирование аналоговых и цифровых фильтров. Учебное пособие. – М.: МАИ, 1993.